第一章

很久以前就知道了π

1.1 公元前的太阳也是圆的！

从人类祖先的祖先诞生在这个地球上算起，经历了几千万年的时间。我们看见的太阳几乎总是圆的，而月亮由于地球的遮挡，有圆有缺。

椭圆、抛物线、双曲线等都是很晚才发现的曲线。地球诞生之前，太阳就是圆形的。月亮大概是和地球同时诞生的。

在使用工具和火不久，人类对太阳和月亮，或者对动物和鱼类的眼睛是圆的，也就是说对圆这种形状一定感到很奇妙。

以后，随着文明的逐渐发达，到了公元前3世纪．古希腊的欧几里得整理了几何学后，对于如何计算圆的周长和它的面积这类问题，即使不是数学家，也会解决。

在埃及的罗赛达碑（解读古埃及文字的钥匙的石碑）和林德纸莎草纸上记载的数学史料以前，估计一定



图 1-1　古代人觉得，圆很奇妙

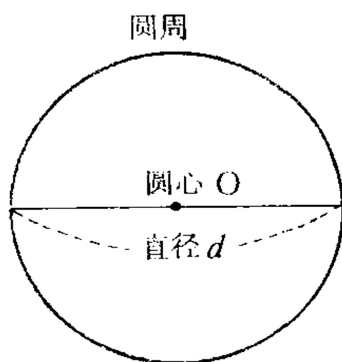


图 1-2

也有人在砂地上立起木棒，并在长度确定的绳子前面缠另一根木棒，像圆规那样划圆。

1.2　圆周与直径成比例

无论圆的大小如何，其周长与直径的比是一定的。人们从什么时候起想到这个问题？

远古，数刚诞生时，肯定只在 1 个和许多个之间有区别。而且，在很早以前，就只考虑 1 和 2 这两个数。

以后，因为 1 个人有 2 只脚和 2 只手，2 个人就有 4 只脚和 4 只手；1 头家畜有 4 只脚，2 头家畜就有 8 只脚，等等。不久，就知道了比例的概念。

另外，人们知道了大的石头重，小的石头轻，比例的概念就发展到比例常数。

到了这个阶段，自然而然会关顾圆周的长度与圆的直径之间一定的比例常数。尽管圆有大有小，但对一个圆来说，其周长 l 与直径 d 之间的比例常数就是圆

周率 π。

1.3 公元前就有了圆周率

根据远古的记载，圆周率 p 是圆周长 l 除以直径 d 的值，也就是说“p 是 l 除以 d”。改成现在的表示方法是 $p=l\div d$。

那时肯定已经知道了加法、减法和乘法等计算方法。

不过，恐怕还没有圆周率这个词和表示圆周率的符号。

公元前 2000 年的巴比伦人认为圆周率的值是 3 或 $3\frac{1}{8}$。另外，稍后时代的埃及人将圆周率的值定为 $p=4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$（当然已经修改成了现在的表示形式）。此公式原式表示在有名的林德纸莎草纸上，写成小数就是 3.16049。

当时列出的式子大概是 $p=4\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}$ 吧，根据现代数学工作者的想像，也就是这样。

远古时代，尼罗河经常发生洪水，因而土地的界限变得不清楚了。这是土地测量活动频繁的原因。测量师在尼罗河边的平坦砂地上立桩子，拴上一定长度的绳子，在绳子的前端捆上另一根短棒，在砂地上划圆。用该短棒划地面，即形成圆周。

因此，使用绳子测量直径的长度，再用直径测量在砂地上形成的圆周的长度，此长度是直径的 3 倍多。

如果不考虑余数的话，圆周率大概为 3 不是也不

错吗？然而由于是粗略的数，所以不太让人感兴趣。

以余下部分的长度为单位，测量直径的长度时，是7倍加少量的余数。假设直径的长度为1，则圆周的长度是比3和$\frac{1}{7}$加在一起要小的数。这样想像的话，圆周率肯定是在$3\frac{1}{7}$和$3\frac{1}{8}$之间。

由此，大概远古时代的圆周率是3，$3\frac{1}{7}$，$3\frac{1}{8}$。它们起了相当大的作用。

1.4 圆面积问题

自公元前的远古时代以来，对圆周率就有了各种各样的考虑，圆周率的计算方法也多种多样。在此期间流传着一个有趣的故事。人们称其为“圆面积问题”。

大约2600年以前，希腊的印欧学派活跃的时候，有位叫做阿那克梅内斯的天文学家。在其弟子中，有一位非常优秀的青年，叫阿那克萨哥拉（Anaxagoras，B. C. 500—B. C，428）。该人有聪明的头脑，能够正确地判断，解释了天文学上的许多现象。

但是，因为当时都认为天文学上的事是上天的旨意，因此没有人进行科学的测量。

然而，阿那克萨哥拉已经对太阳的运行，昼夜的变化，月圆月缺，星的运行等进行了调查研究，并试图对各种天地变化加以解释说明。他反复进行了各种各样的研究，在当时，一般人认为他是亵渎神明的不法之徒，因而受到了很大的非难。

最后，他被逮捕入狱，而且把他的书全部没收。但

即使在监狱中他仍然继续考虑能做的事，他考虑了一个几何学的问题，这就诞生了有名的“圆面积问题”。

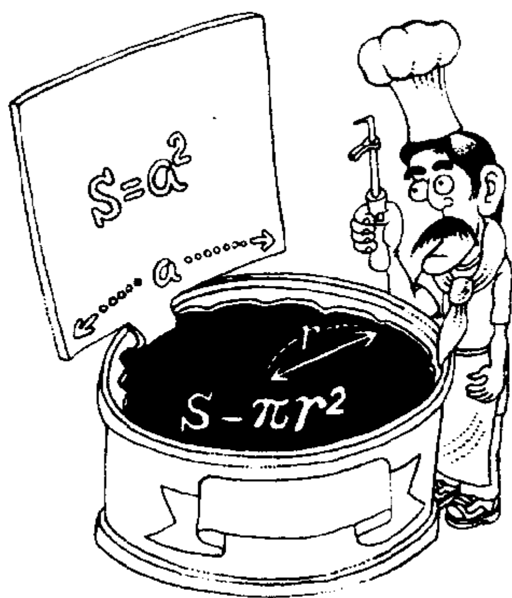


图 1-3　如何作与圆面积相等的正方形？

所谓圆面积问题就是“作与圆相等面积的正方形”。

因此，有的研究者认为，为解决此问题的阿那克萨哥拉是最先研究圆周率的人。

此问题成为世界三大难题之一。

所谓的世界三大难题都是几何问题，而且也都只是作图问题。

作图问题，就是只使用直尺和两脚规，对图形进行描绘，不能使用测量长度的尺和测量角度的分度尺。

“圆面积问题”是三大难题中的一个，其它的第二个、第三个难题如下所述。

第二个难题是“将给定的角三等分”；第三个难题是“作出给定立方体的 2 倍的立方体”。

关于第三个立方体的问题，流传着下面那样的小

故事。

远古时代，在希腊一个叫做提洛岛的地方，有一位国王。他的儿子，也就是王子，得了一种奇怪的病，很快就去世了。国王非常悲伤，派人去给死去的儿子修一座富丽的坟墓。但是当他看到修好的坟墓以后认为太小了，决定再修建一座稍大一点的坟墓。

因此，国王命令家臣修建一座体积为上座墓的2倍的坟墓。家臣们打算将长、宽、高分别增加到原来的2倍，这时体积却成了原来的8倍。

为了将新坟墓的体积做成原来的2倍，必须把一边的长度做成原来的$\sqrt[3]{2}$倍。于是他们便和当时的大数学家柏拉图(Platon，B.C. 429—B.C. 347)商量。柏拉图和弟子们共同进行了研究，最终仍未得到正确的答案。

此后，这个问题，除希腊全国外，还越过了意大利、法国、德国、英国等国扩大到全世界。

在此，离开世界三大难题的话题，稍说一下尚未得到解决的费马大定理。



图1-4　费马(1601—1665)

皮埃尔·费马(Pierre de Fermat，1601—1665)是

法国图卢兹附近一位皮革商的儿子。他没进过学校，是在家庭中受的教育。1631 年他 30 岁的时候，被选为地方议会议员。此后作为一名忠实的议员活跃在社会上，为当地尽职尽责。他是利用业余时间，出自兴趣研究数学的，并没有发表自己的研究成果。但他死后出版的书信和笔记即称为"费马大定理"。

在他所研读的亚历山大时代的数学家戴芬图斯的整数论的空白处写下了这样一段话，"当 n 为大于 2 的整数时，不存在满足 $x^n+y^n=z^n$ 的正整数组(x,y,z)。这已被证明，但这里空白太窄。"

这个问题也同世界三大难题一样，在以后 350 多年的长时间里，全世界的数学家们协作研究，但仍未得到解决。

对于这个问题，根据 1908 年德国的叫威尔斯卡尔的人的遗言，到 2007 年完成此证明的人，将得到 10 万马克的奖金。但是，这是 1919 年以前的奖金额，由于第一次世界大战的恶性通货膨胀和随后货币价值的变动，现在这个奖金数已变得很少了。

1988 年 3 月 18 日的朝日新闻的晚报上，刊登了一个日本人参与解决此问题的文章，下面简单介绍一下。

此人就是现在在德国马克·普朗克数学研究所的日本数学家，东京都立大学助理教授宫岡洋一先生。虽然他还没有完成，但已有了相当的进展，说不定再努力一下就成功了。

对 $x^n+y^n=z^n$ 来说，当 $n=2$ 时，有 $x^2+y^2=z^2$。噢，这大概是在什么地方见到过的等式吧！

是的，这就是非常有名的"毕达格拉斯定理（三平

方定理)”。

$n=2$ 时，满足此关系式的整数有无数个。我们知道的有 $3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$，$7^2+24^2=25^2$，$9^2+40^2=41^2$，$11^2+60^2=61^2$，……等等。

然而，费马除了整数论中的发现外，还发现了与笛卡儿不同的解析几何学(使用坐标的几何学)。再者，他对微积分的见解也与牛顿和莱布尼兹的不同，是他独自考虑的方法。因此，法国人把费马称为微积分的发明者。



图 1-5　牛顿(1642—1727)

稍微离一下题，微积分学是英国的牛顿(Sir I. Newton，1642—1727)和德国的莱布尼兹(G. W. Leibniz，1646—1716)几乎同时分别研究、发明的。而德国和英国过去一直不友好，长时间争夺领先权，所以不能判决。现在，可以认为是他们二人同时进行了同样的研究，完成了今日的微积分学。

但是，现在使用的微积分符号几乎都是莱布尼兹想出来的。

日本江户时代的数学家关孝和也是在同一时期用同样的微积分法求圆面积的。

现在再回到正题上，圆面积问题无法解决，这一点已经证明了。但当时的数学家相信这个问题是可能解决的，为此考虑了各种各样的方法。其中有一位距今已有 2400 年索菲斯特学派的名叫安蒂风的人，他求出半径为 1 的圆内接正方形的面积，接着将内接正方形的边数增加到 2 倍成为 8 边形，进而再将边数增至 2 倍成为 16 边形，继续将边数增至 2 倍成为 32 边形，64 边形，求其面积。再继续求内接正 128 边形的周长及面积。他相信，如果用这种方法一个接一个地求下去的话，圆的面积和周长是可以求出来的。

另外，名叫普里森的数学家利用圆外切正方形来计算圆的面积及周长。他将边数逐渐增加为 8，16，32，64，…等等，求其多边形的面积和周长。

因此，其他数学家认为将他们二人的计算值平均（相加平均）的话更好。

这时，古代希腊有名的大数学家、物理学家阿基米德发表了下面的方法。

“将圆的半径作为高，将圆周的长度作为底边的三角形的面积就等于圆的面积”。

的确，通过这种方法，半径为 r 的圆的面积为 $r\times 2\pi r\div 2=\pi r^2$，这便成了圆面积的公式。

因为要把与圆周相同的长度作为底边，所以要考虑“极限方法”。

因此，圆周率 π 的计算变得非常重要了。换言之，如果由圆周率的计算，能够算出正确的圆周长度的话，圆的面积也可以正确地计算。

1.5 阿基米德的圆周率

在此稍微介绍一下著名的阿基米德。

古代希腊的阿基米德(Archimedes,B. C. 287—B. C. 212)是一位研究数学和物理学,并有许多发明的科学家。他发现了用小的力可以推动大物体的杠杆原理。使用这个原理可以驱动大船。他说:"给我大的杠杆和支点的话,即使地球也能推动"。



图 1-6 阿基米德

(B. C. 287—B. C. 212)

另外,他还使用比重的方法,证明了王冠不是纯金的。这个故事也是相当有名的。

他发现比重是因为进入浴池的瞬间觉得自己的身体变轻了。发现这一现象后,他非常高兴,竟然一丝不挂走到了大街上。他是裸体在大街上飞跑的始祖。

而且,他还进行了有关圆的研究,发现了求圆周长度和圆面积的公式,还计算了圆周率 π 的近似值。

公元前 3 世纪他就求出了 π 的近似值 $3+\frac{10}{71}<\pi$

$<3+\frac{1}{7}$，$\pi\approx\frac{211875}{67441}\approx3.14163$。

他上了年纪以后，希腊在战争中失败了。敌国士兵攻进他家时，他正在床上描绘图形。因为士兵践踏了他研究的图形，他猛然不加思索地喊到“不要践踏图形”，而被杀害了。

阿基米德直到死的时候还在研究图形。日后，敌国的国王听到了这件事，为杀了一位杰出的人士而感到遗憾。

1.6 最早计算圆周率的人

通过使正多边形内接于圆，将其边数逐渐增多来计算圆周长度的方法，很早就用于圆周率的计算了。当圆的直径为1时，其圆周长就是圆周率，也就是说，$2\pi r=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$。

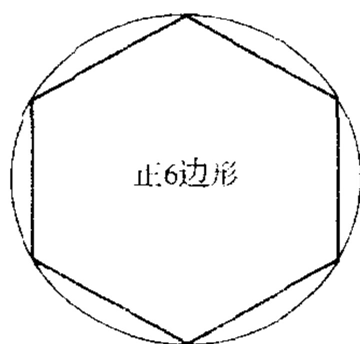


图1-7

希腊大数学家阿基米德用这种方法计算圆内接正6，12，24，48边形的周长，最后算到圆内接正96边形的周长，发现圆周率比$3\frac{10}{71}$大。进而他又继续计算圆

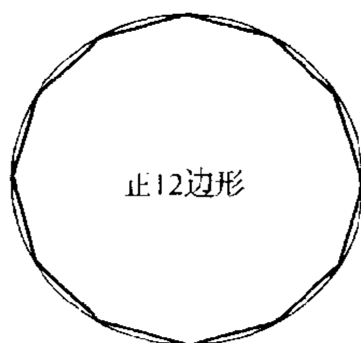


图 1-8

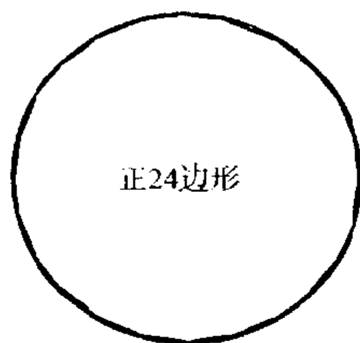


图 1-9

外切(各边切于圆)正 96 边形的周长,发现圆周率比 $3\frac{1}{7}$ 小。从而了解了圆周率比 $3\frac{10}{71}$ 大,比 $3\frac{1}{7}$ 小。将其写成不等式,则为

$$3\frac{10}{71}<\text{圆周率}<3\frac{1}{7}$$

用小数表示为

$$3.140845\cdots<\pi<3.142857\cdots$$

以后,许多数学家就是用这种方法计算圆周率的。

但是,用阿基米德的这种计算,只能正确地计算到小数点后第 2 位,因此,圆周率就成了 3.14。

下表列出通过计算圆内接或圆外切正多边形的周长来计算圆周率的人名,正多边形的边数,和得到的圆

周率的正确值的位数。

由正多边形得到的π的近似值

计 算 人	多边形的边数	正确值
阿基米德(B.C.287—B.C.212)	6×2^4	3.14
皮沙诺(1175—?)	6×2^4	3.141
比埃塔(1540—1603)	6×2^{16}	小数点后10位
罗马奴斯(1561—1615)	5×2^{24}	小数点后15位
卢多夫(1540—1610)	2^{62}	小数点后35位

1.7 圆周率的近似值$\frac{355}{113}$是谁发现的?

在欧洲,最有名的圆周率的近似值是$\frac{355}{113}$。此值换算成小数则为3.1415929…,而圆周率的近似值为3.14159265358979…,因此可知,直到小数点后6位是正确的。

发现此值的人是A.梅蒂艾乌斯(1527—1607)。

但是在中国,比这早1000年,著名的数学家祖冲之(429—500)就已经发现了。此人也是有名的历学家,在462年(大明6年)他制作了大明历,开始采用岁差。

1.8 德国人称圆周率为卢多夫数

通过使正多边形内接圆或外切圆来计算圆周率的方法,计算得最准确的人是荷兰的卢多夫(Ludolf van Geulen,1540—1610)。

卢多夫姓“Geulen”,用汉字写成“固灵”。

卢多夫在1596年计算了正60×2^{33}边形的周长,将π的近似值准确地计算到了小数点后20位。此后在

1610 年他临死之前，又计算了正 2^{62} 边形的周长，准确地算出小数点后 35 位。

他将此事引以为自豪，留下遗言，在莱顿市的杨德·帕泰中心教堂的墓碑上刻上了他的这一成就。

在德语中，如果说起卢多夫数，即表示圆周率(π)。

他生于 1540 年 1 月 28 日，死于 1610 年 12 月 31 日(除夕)，他是将一生贡献给计算圆周率近似值这一事业的人。

1.9 传到中国的卢多夫数

为了传教访问中国的天主教徒罗雅谷，在制造的测量全仪中，圆周率的近似值写到小数点后 20 位。

由测量全仪得到的圆周率是谁计算的不清楚，但在此后 100 年出版的"数理精蕴"中计算到圆内接或外切的正 60×2^{33} 边形。每边的长度写到 30 位，由此可知，大概是卢多夫的计算很快就传到中国了。尤其是圆周率的 20 位，可能是从 1596 年卢多夫计算后立刻就传到了中国。

1.10 日本的圆周率计算

在日本圆周率的值总是用 3.2，但渐渐地，使用 3.16 的人多了。1674 年，古郡之政使用了 $\frac{22}{7}$，$\frac{157}{50}$，$\frac{355}{113}$ 等。1683 年奥田有益使用了 3.14，同年礒村吉德使用了 3.1416。1696 年古郡解使用了 3.14166136832，1699 年三宅贤隆使用了 3.1415928。

1772 年日本数学家闵孝和计算的圆周率的值比 3.14159265359 略小。此值直到小数点后 10 位是正确的（摘自平山谛著的《圆周率的历史》）。

日本人如何表示圆周率呢？

在汉字地区的中国和日本，没有圆周率的符号，而有“圆周率”、“周率”、“圆周法”等各种各样的叫法。

当时日本没有小数的表示方法，而用分数表示圆周率。因此，采用像“径率一”“圆周三一四”这样书写方式，而且用汉字。



图 1-10　闵孝和（1642—1708）

在英语中，没有表示圆周率的词，用希腊文字 π 代表，读作“Pi”。

1.11　圆周率 π 的语源

作为圆周率的符号，目前全世界都使用 π。π 的语源是希腊语 περιφερεια（周围之意）的字头。

最早将 π 作为符号使用的人是 W. 乔治（1675—1749），这时用 π 是周围的意思。

以后，J. 伯努利使用 c，L. 欧拉使用 p（1734），c

(1736),哥德巴赫使用 π 等作为圆周率的符号。



图 1-11　J. 伯努利(1667—1748)

然而,欧拉在他有名的解析学的书中,使用了 π 作为圆周率的符号。因此,在 1748 年以后,一般都使用 π。

但据说,比乔治还早,奥托莱多(1575—1660)于 1647 年,就使用 π 作为圆周率了。巴洛也开始使用了 π。

究竟是谁和在哪个地方首先使用 π 的,还不清楚。

1.12　各种 π 值

如前所述,公元前 2000 年时,在巴比伦使用的是 $\pi=3$,$\pi=3\frac{1}{8}$;在埃及使用的是 $\pi=4\times\left(\frac{8}{9}\right)^2$;阿基米德使用的是 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$;中国的祖冲之在 5,6 世纪时使用的是 $\pi=\frac{355}{113}$。此外,还有许多不同的 π 的近似值。

不想轮流着说,而按自己想到的,将 π 的近似值的

演变做一介绍。

首先，对于林德纸莎草纸稍说几句。

在埃及尼罗河流的潮湿地带生长的植物中，有一种高约 2 米，叫做纸莎草的植物，将这种植物的茎切成薄片，再将薄片纵横反复压缩，就制成了像现代的纸那样的东西。这就是纸莎草纸。

在这种东西上写成的书籍中，有关于数学方面的有名的论述，就是在特贝的废墟上发现的林德纸莎草纸。

在 1877 年一位名叫艾森罗尔(Eisenlohr)的人解读的林德纸莎草纸中，有圆的面积问题。据此推测，$\pi=\frac{64}{81}\times 4=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3.16049\cdots$。当时的圆周率使用 3.16。

在莫斯科美术博物馆展出的纸莎草纸中，有球的表面积的计算。由此判断，

$$\pi=\frac{16}{9}\times\frac{8}{9}\times 2=\frac{256}{81}=3.16049\cdots$$

圆周率也为 3.16。

希伯莱人的圆周率因为是写在求圆面积方法的文章中的，由此计算圆周率的值为$\frac{22}{7}$。

在古希腊虽有不少著名的数学家，但对圆周率没有表示太大的关心。

天文学家托勒密(87—165)考虑的圆周率的值是 $\frac{211872}{67441}=3.1415904\cdots$，或者是 $\frac{195882}{62351}=3.1416015\cdots$。

从阿基米德以后的 300 年，圆周率从 3.14 到

3.141，只发展了1位。

印度的数学史家达塔在1929年指出，古代印度(B.C.500—B.C.300)的圆周率为 $\pi=\sqrt{10}=3.16227\cdots$。

另外，有名的印度数学家阿里阿巴特(476—550)将圆周率定为 $\pi=\frac{62832}{2000}=3.1416$，一直保留到今天。

目前在日本的中学和高校中使用的 π 值与此值完全相同。

比阿里阿巴特更进一步，巴斯卡拉(1114—1185)使用 $\pi=\frac{3927}{1250}=3.1416$ 和 $\frac{754}{240}=3.141666\cdots$ 两种圆周率。

另外，阿拉伯的数学家卢克瓦利兹(780—850)使用 $\pi=\frac{22}{7}$。

阿拉伯计算圆周率的人是阿鲁·比路恩(937—1038)。他使用圆周率为 $\pi=3.141745\cdots$，但只用到小数点后3位。

另外，罗马的比特尔-比乌斯使用圆周率为 $\pi=3\frac{1}{8}$。

第二章

微分 积分和 π 的展开式

2.1 延长 π 的位数的竞争结束了

在此之前平山博士的书中已经介绍过，从阿基米德到卢多夫，也就是从公元前 3 世纪到 17 世纪约 20 个世纪，2000 年的岁月流逝了，π 的近似值从小数点后第 2 位发展到第 35 位。

反过来说，2000 年间只不过延长了 33 位。

而其他的数学家至死都在为延长 π 的位数进行着竞争。例如，荷兰数学家 A. 安索尼山（1527—1607）发现了 $\frac{355}{113}$ 这一值，可以准确地计算到小数点后 6 位。另一位荷兰数学家 A. 藩勒芒于 1593 年准确地计算到小数点后 9 位。他与阿基米德一样也是使用具有 2^{30} 边的正多边形计算的。

在 3 年后的 1596 年，前面提到过的卢多夫将 π 准确地计算到小数点后 20 位。他是莱顿大学的数学教授，同时也是军事科学方面的教授。他也是荷兰人。他

死后，在 1615 年由其妻子出版的书中，π 的近似值延长到小数点后 35 位。

然而，进入 17 世纪时，关于 π 的值，发现了许多无穷级数和连分数，从而，π 的近似值的小数点后的位数迅速增加，通过正 n 边形的边长计算 π 值的竞争结束了。

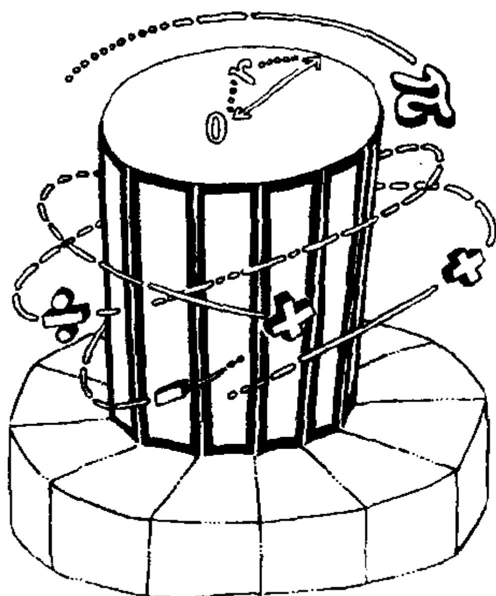


图 2-1　π 的计算的进展

2.2 π 不是循环小数

对于这个问题，回答“不”尚为时过早。因为 π 是小数位数很多的一个数，所以也有数学家认为 π 可能是循环小数。

假如 π 是循环小数，则可用两个整数(不管它们的位数如何大)之比，即肯定可用分数表示。

反之，π 不是循环小数，那就显然不是个有理数，则 π 肯定是无理数。此证明留给专家。

然而，最近也有人认为“π 是超越数”。关于“超越

数”在后面会稍加说明,其理论请看专业书籍。

2.3 如何计算微分?

想必大家都知道微积分学,为了说明此概念,我们进行简单的说明。



图 2-2 莱布尼兹(1646—1716)

英国的牛顿和德国的莱布尼兹在同一时期分别考虑了微积分。据说在日本江户时代有代表性的数学家闵孝和也考虑了同样的问题。

微分和积分是求由曲线围绕的那部分的面积和由曲面围绕的立体的体积的非常简单方便的方法。

在函数 $f(x)$ 中,当 x 趋近某个常数 α 时,$f(x)$ 趋近常数 β,用极限符号 lim,可写成 $\lim f(x)=\beta$。

也可写成“$x\to\alpha$ 时,$f(x)\to\beta$”。

那么,$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$ 成立的话,可以说“$f(x)$ 收敛于 β”。

然而,β 是有限确定的值。

另外,函数的极限具有下述性质。

对于$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$,$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\gamma$

i) $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = k\beta$（$k$ 为常数）

ii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = \beta \pm \gamma$

iii) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
$= \beta \cdot \gamma$

iv) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{\beta}{\gamma} \ (\gamma \neq 0)$

在 $x=a$ 时定义函数 $f(x)$，而且，当 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ 时，就说"$f(x)$在 a 处是连续的"。

另外，在函数 $f(x)$ 中，当 x 的值从 a 变化到 b 时，将 x 的变化量 $b-a$ 与 y 的变化量 $f(b)-f(a)$ 之比 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 称为"x 从 a 变到 b 时的函数 $y=f(x)$ 的平均变化率"。

从函数 $y=f(x)$ 的定义域中取实数 a，相对于以 a 为基准的 x 的增量 $\Delta x = x-a$，y 的增量为 $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a+\Delta x) - f(a)$。当 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的。另外，极限值 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处是可微的。

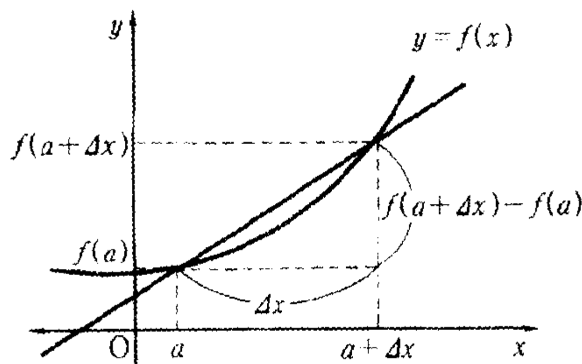


图 2-3

将极限值$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$称为“$x=a$ 时 $f(x)$的微分系数”，用 $f'(a)$表示。可写成下式：

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

函数 $f(x)$在 $x=a$ 可以微的话，则函数 $f(x)$在 $x=a$ 是连续的。

但是，反之则不一定成立。因为即使是连续的也有不可微的时候。这是因为有时曲线突然弯折的缘故。

对应于 x 的各个 a 值，将所对应的 $f'(a)$的函数用 $f'(x)$表示，称为“$f(x)$的导数”。

求函数的导数称为“对函数 $f(x)$微商”。

而在导数的计算公式中，有下列情况：

i) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$（定义）

ii) $y=x^n \Rightarrow y'=(x^n)'=nx^{n-1}$

iii) C 为常数时，$y=C\Rightarrow y'=(C)'=0$

iv) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

v) $[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$

vi) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

（但 $g(x)\neq 0$）

函数 $f(x)$的导数用 $f'(x)$表示，在此，将 $f'(x)$看成是一个函数，则 $f'(x)$的导数也存在。将其用 $f''(x)$表示，称为“$f(x)$的二阶导数”。

进而考虑 $f''(x)$ 的导数，表示为 $f'''(x)$，称为“$f(x)$的三阶导数”。

这样，依次考虑到 n 阶导数。在此，将 2 阶、3 阶…、n 阶导数称为“高阶导数”。

2.4 什么是积分法

x 的函数 $F(x)$的导数是 $f(x)$时，也就是说 $F'(x)=f(x)$时，称 $F(x)$为 $f(x)$的“不定积分”。另外，也可将 $F(x)$称为“原函数”。

$F(x)$是 $f(x)$的一个不定积分(原函数)，用 $F(x)=\int f(x)dx$ 表示。

将 $\int$ 称为“积分符号”。它是英语 Sum(和)的字头 S 上下拉长的形式。据说这是法国的莱布尼兹考虑的符号，但真实的情况不清楚。或许这是欧拉的功劳。

积分的定义用公式表示，则有以下形式：

i) $F(x)=\int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

ii) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

然而，由于 $F(x)$的导数只是 $f(x)$，常数 C 的导数是 0，所以，$f(x)$的不定积分(原函数)有无数个。

因此，加上积分常数 C，表示不定积分。

在某区间考虑函数时，如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个不定积分，则 $f(x)$的不定积分如下所示。

$$\int f(x)dx=F(x)+C \quad (C\text{ 为积分常数})$$

在此，将求 $f(x)$的不定积分称为“对函数 $f(x)$积分。”

在积分法中有以下的性质：

i) $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ (但 $n\neq-1$)

ii) $\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x}$

$= \ln|x| + C \quad (\ln|x| = \log_e|x|)$

iii) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ （k 是常数）

iv) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

此外还有许多性质，但因与 π 无关，故此省略。

2.5 定积分及其应用

根据不定积分，$F'(x) = f(x)$ 时，则

$\int f(x)dx = F(x) + C$ （C 为积分常数）

然而，附上积分常数 a, b，写成的 $\int_a^b f(x)dx$ 的形式称为“定积分”。把 a 称为下限，b 称为上限。

那么，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 的关系相信大家都知道。

本来是为了求曲线围成的面积和曲面围成的体积而发现了微分，进而又发现了定积分，故计算面积和体积是其根本的任务。

那么，用定积分来求面积和体积。

在此只处理与 π 有关系的问题。

现在按顺序进行说明，这样容易清楚。

首先求曲线 $y = f(x)$ 围绕 x 轴旋转时形成的旋转体的体积。

如图 2-4 所示，在 $x = x_1$ 处旋转体的切口是圆，使用切口半径 $y_1 = f(x_1)$，其面积为

$$S = \pi y_1^2 = \pi[f(x_1)]^2。$$

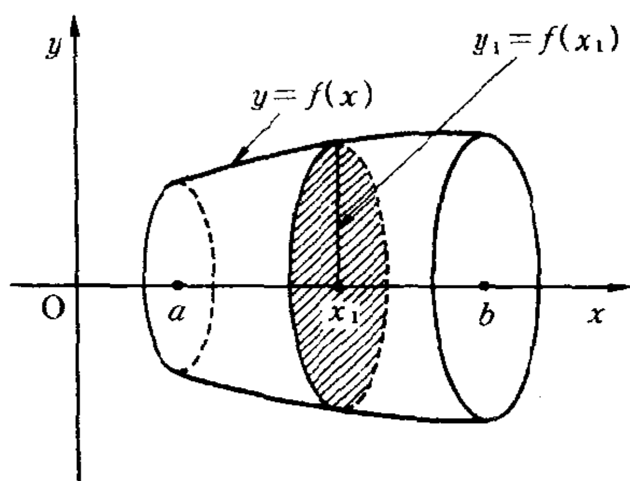


图 2-4

从而，体积可通过对 S 从 a 到 b 定积分来求。体积 V 为

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

式中使用了 π。

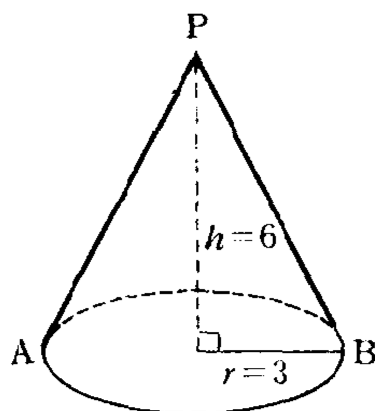


图 2-5

下面使用定积分验证一下过去遇到的求各种各样体积的公式是否正确。

首先看如何计算底面半径 $r=3$(厘米)，高 $h=6$(厘米)的圆锥的体积 V。

将图中的圆锥看作是旋转体，像图 2-6 那样定坐

标轴，可以如下计算。

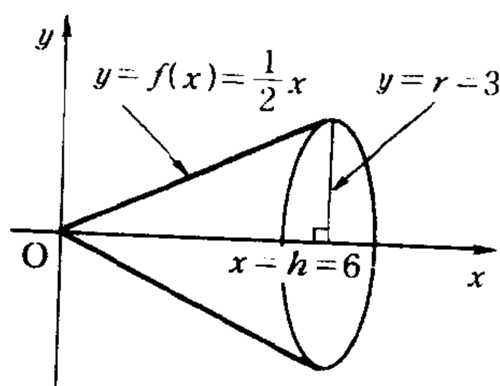


图 2-6

$$V=\pi\int_0^6 y^2dx=\pi\int_0^6\left(\frac{x}{2}\right)^2dx=\frac{\pi}{4}\int_0^6 x^2dx=\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{6^3}{3}-0\right)=\frac{\pi}{4}\times6\times6\times2=18\pi(\text{厘米}^3)$$

这个答案与中小学生熟识的公式

$$V=\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times6=18\pi(\text{厘米}^3)$$

相同。

此处也使用了 π。

其次，计算图 2-7 中水桶的体积

像图 2-7 右图那样定坐标轴的话，则

$$y=\frac{15-10}{25}x+10=\frac{5}{25}x+10=\frac{x}{5}+10$$

因此，体积 V 为

$$V=\pi\int_0^{25}\left(\frac{x}{5}+10\right)^2dx=\frac{\pi}{25}\int_0^{25}(x+50)^2dx$$
$$=\frac{\pi}{25}\int_0^{25}(x^2+100x+2500)dx$$
$$=\frac{\pi}{25}\left[\frac{x^3}{3}+50x^2+2500x\right]_0^{25}$$
$$=\frac{\pi}{25}\left(\frac{25^3}{3}+50\times25^2+2500\times25\right)$$

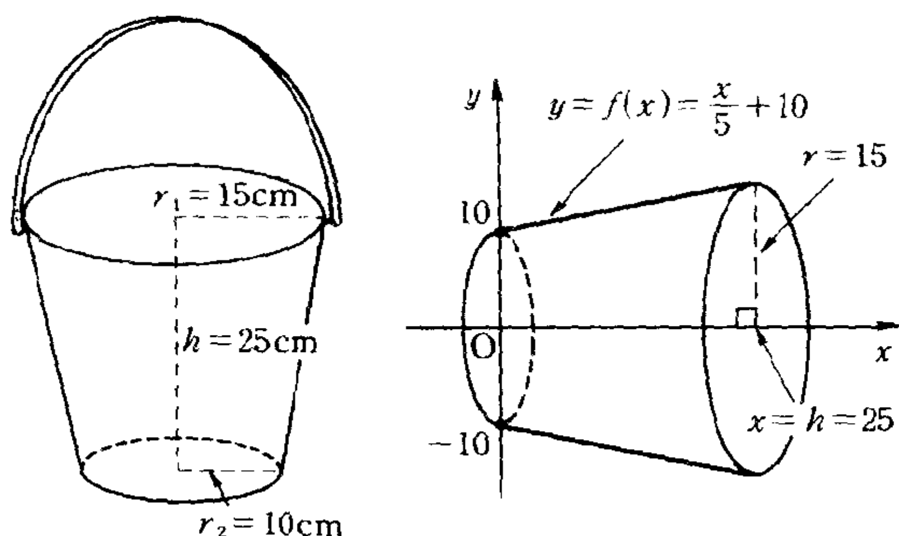


图 2-7

$$=\pi\left(\frac{25^2}{3}+50\times 25+2500\right)$$

$$=\pi\left(\frac{625}{3}+1250+2500\right)$$

$$=\pi(208+\frac{1}{3}+3750)=3958\frac{1}{3}\pi(\text{厘米}^3)$$

这样计算是正确的，而用其它的计算方法就稍微麻烦些了。

考虑将水桶的形状延展成大圆锥，从其体积中减去小圆锥的体积，则可计算出水桶的体积。

其中，有必要计算比例，但不是很困难，试计算一下。总之，在此也使用了 π。

下面，计算半径为 3 厘米的球的体积。

如图 2-8 那样设定坐标轴，则体积 V 为

$$V=2\pi\int_0^3 y^2dx=2\pi\int_0^3(3^2-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^3(9-x^2)dx=2\pi\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$=2\pi\left(9\times 3-\frac{3^3}{3}\right)=2\pi(27-9)$$

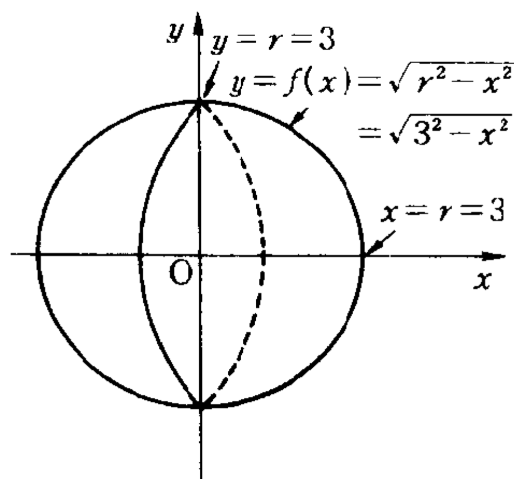


图 2-8

$$= 2\pi \times 18 = 36\pi(\text{厘米}^3)$$

使用小学生计算球体积的公式 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 也能得到这个答案。

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 4 \times 9\pi = 36\pi(\text{厘米}^3)$$

下面的计算也许稍困难一点，试计算椭圆绕其轴旋转时形成的旋转椭球体(也称为椭球体或椭圆面)的体积。

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的坐标轴如图 2-9 所示。将方程变形为 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$，则体积 V 为

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^a y^2 dx \\ &= 2\pi \times \frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx \\ &= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) \\ &= 2\pi b^2 \times \frac{2a}{3} = \frac{4}{3}\pi a b^2 \end{aligned}$$

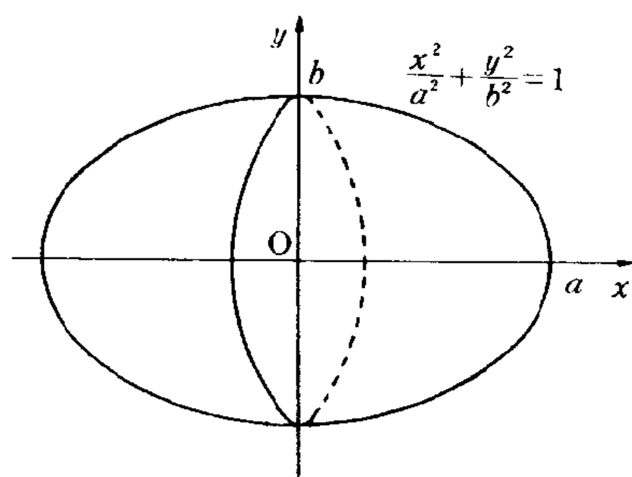


图 2-9

用中学生水平的公式无法研究椭圆体的体积。此处又出现了 π。

进而,计算另一些旋转体的体积。请看图 2-10。

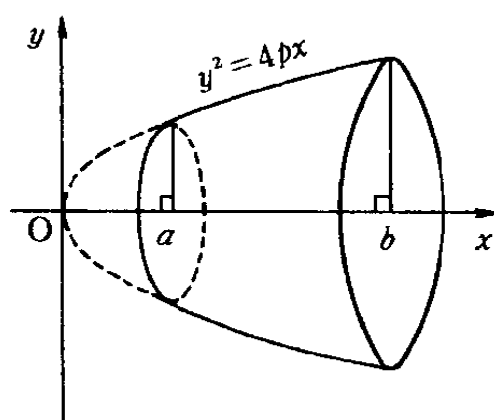


图 2-10

抛物线 $y^2=4px$ 绕 x 轴旋转时形成的抛物面的体积 V 为

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=4p\pi\int_a^b xdx=4p\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$

$$=2p\pi\left[x^2\right]_a^b$$

$$=2p\pi(b^2-a^2)\ (p,a,b\text{ 为常数})$$

例　求 $y^2=4x^2[0,4]$绕 x 轴旋转时形成的旋转

体的体积(图 2-11)。

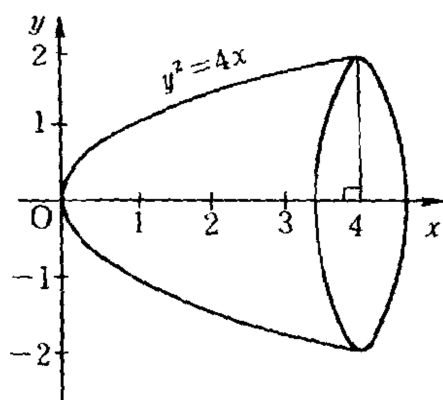


图 2-11

解　体积V为

$$V = 4\pi\int_0^4 x dx = 4\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$
$$= 2\pi\left[x^2\right]_0^4 = 2\pi(4^2 - 0^2)$$
$$= 2 \times 16x\pi = 32\pi$$

把双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$绕$x$轴旋转形成的旋转体称为“双叶双曲面”(图 2-11)。它的体积如下求解。首先，将所给双曲线的方程关于y^2变形，由$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$，得

$y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$，$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$，故

$$V = \pi\int_\alpha^\beta y^2 dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\int_\alpha^\beta (x^2 - a^2)dx$$
$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{x^3}{3} - a^2 x\right]_\alpha^\beta$$
$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{\beta^3}{3} - a^2\beta - \left(\frac{\alpha^3}{3} - a^2\alpha\right)\right]$$
$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left[\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - a^2(\beta - \alpha)\right]$$
$$= \frac{b^2(\beta - \alpha)}{3a^2}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3a^2)\pi$$

a, b, α, β 为常数，且 $a < \alpha < \beta$。

例　求双曲线 $x^2 - y^2 = 1[1,3]$ 绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积(如图 2-12)

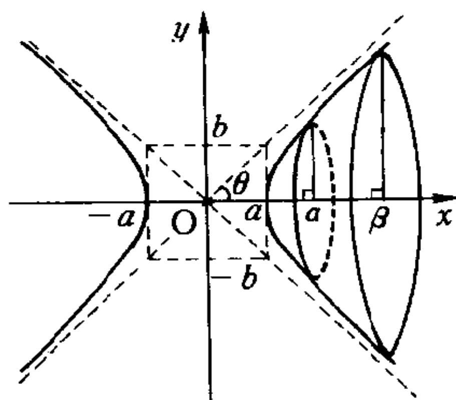


图 2-12

解　设体积为 V 时，

$$V = \pi \int_1^3 (x^2 - 1) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3$$

$$= \pi \left[\frac{3^3}{3} - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right]$$

$$= \pi (9 - 3 - \frac{1}{3} + 1)$$

$$= \pi (7 - \frac{1}{3}) = 6\frac{2}{3}\pi (= \frac{20}{3}\pi)$$

另外，把双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 y 轴旋转形成的旋转体称为单叶双曲面(图 2-13)。

它的体积求解如下。

将所给方程式变形，由 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$，得

$$x^2 = a^2 \left(\frac{y^2}{b^2} + 1 \right) = \frac{a^2}{b^2} (y^2 + b^2)$$

$$V = \pi \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dy = \frac{a^2 \pi}{b^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} (y^2 + b^2) dy$$

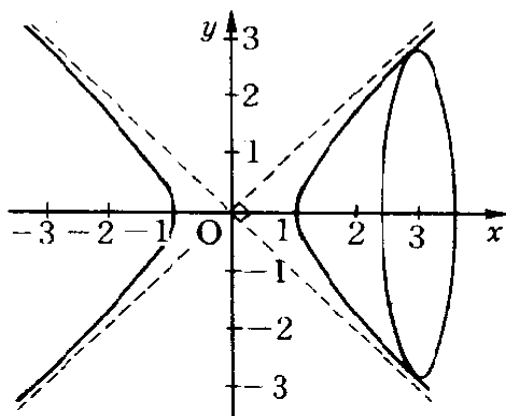


图 2-13

$$=\frac{2a^2\pi}{b^2}\int_0^{\alpha}(y^2+b^2)dy=\frac{2a^2\pi}{b^2}\left[\frac{y^3}{3}+b^2y\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{2a^2\pi}{b^2}\left(\frac{\alpha^3}{3}+b^2\alpha\right)$$

例　求双曲线 $x^2-y^2=1$，$-2\leqslant y\leqslant 2$ 绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积。

解　体积 V 为

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(y^2+1)dy$$

$$=2\pi\int_0^2(y^2+1)dy=2\pi\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_0^2$$

$$=2\pi\left(\frac{2^3}{3}+2\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{8}{3}+2\right)=\pi\left(\frac{16}{3}+4\right)=\frac{28}{3}\pi\left(=9\frac{1}{3}\pi\right)$$

进而，用积分求圆面积，并考查半径为 r 的圆面积 S 是否等于 πr^2。这也许稍微困难一些。

如图 2-15 那样取坐标轴时，用定积分求面积 S，则

$$S=4\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx$$

在此，设 $x=r\sin\theta$ 时，$dx=r\cos\theta d\theta$。从而 $x=0$

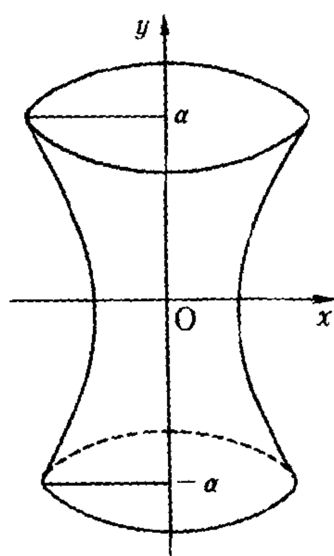


图 2-14

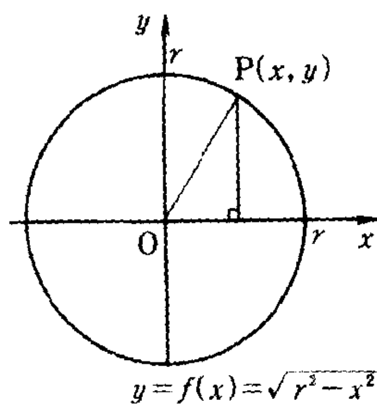


图 2-15

时，$\theta=0$；$x=r$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

而且，由于 $r^2-x^2=r^2-r^2\sin^2\theta=r^2(1-\sin^2\theta)=r^2\cos^2\theta$，则 $\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{r^2\cos^2\theta}=r\cos\theta$。因此，

$$S=4\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot r\cos\theta d\theta$$

$$=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$= 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2\theta)d\theta = 2r^2\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) = 2r^2\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \pi r^2$$

其实，连小学生和中学生也知道求圆面积的公式。

（圆面积）＝（圆周率）×（半径）^{2}

此处也用了 π。

接下去试求椭圆的面积。由椭圆方程式$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（图 2-16），得到 $y=f(x)=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$。所以，面积 $S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx$。

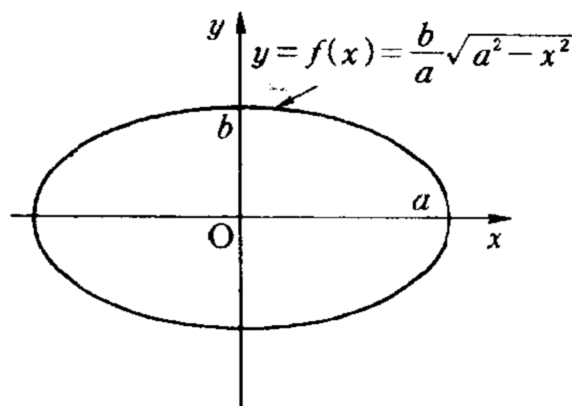


图 2-16

与圆面积相同，设 $x=a$ 时，$dx=a\cos\theta d\theta$；$x=0$ 时，$\theta=0$；$x=a$ 时，$\theta=\frac{\pi}{2}$。

而且，$a^2-x^2=a^2-a^2\sin^2\theta=a^2(1-\sin^2\theta)=a^2\cos^2\theta$。因此$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$，则圆面积 S 为

$$S=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\cos\theta d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)d\theta = 2ab\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right) = 2ab\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \pi ab$$

长轴为 a,短轴为 b 的椭圆面积可以简单地求出是 πab。此式中也出现了 π。

在此试求与上述曲线稍有变化的曲线围成的面积。诸位知道称为摆线(cycloid)的曲线吗?

大家是否考虑过车轮上的一点 P 随着车轮转动作什么样的运动?夜间,在自行车的车轮上安装一个小灯泡,让自行车行走的话,可形成光的轨迹。将表示车轮上这一点的曲线称为"摆线"。

如图 2-17,该曲线与椭圆形很相似,但与椭圆又不相同,故此请注意。

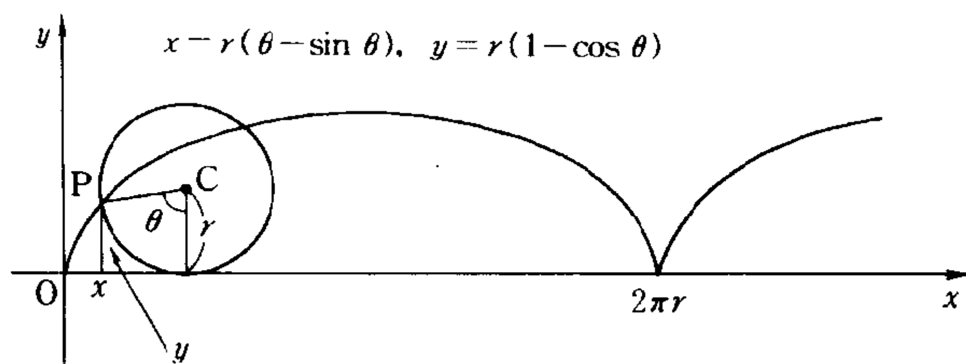


图 2-17

在此试计算 0—$2\pi r$ 的摆线与 x 轴间的面积。

该曲线可用旋转角 θ 表示车轮上某点 $P(x,y)$ 的运动,取车轮的半径为 r 时,则

$x=r(\theta-\sin\theta)$,$y=r(1-\cos\theta)$($r>0$)

那么,$dx=r(1-\cos\theta)$,在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi r$ 之间 $y\geqslant 0$,

摆线与 x 轴间的面积 S 为

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi r} y dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\cdot r(1-\cos\theta)d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{\cos2\theta}{2}\right)d\theta \\
&= r^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= r^2\left(\frac{3}{2}\times 2\pi-2\sin2\pi+\frac{\sin4\pi}{4}\right) \\
&= r^2(3\pi-\theta+0) \\
&= 3\pi r^2
\end{aligned}
$$

此值中也存在 π。

如以上所述，曲线围绕的面积和曲面围绕的体积中 π 是经常出现的。

2.6 泰勒展开式

在进入 π 的展开式之前，首先简单说明一下著名的泰勒展开式。

读者也许感到稍微难一些，这里有 3 个定理。

“如果 $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 存在 $f^{(n)}(x)$，则

$$
f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots
$$

$$\cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n$$

式中 $R_n = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1)$。

这就是泰勒定理(Ⅰ)。

此处的符号$[a,b]$表示 $a \leqslant x \leqslant b$，$(a,b)$表示 $a<x<b$。

另外，$f^{(n)}(a)$表示对 $f(x)$进行 n 次求导并代入 $x=a$。

符号 $n!$ 表示 $n! = n(n-1)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$，称为“$n$ 的阶乘”或“n 阶乘”。

泰勒定理(Ⅰ)也可写成如下形式：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n$$

其中，无论 x 和 a 的大小如何，且

$$R_n = \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta(x-a)) \quad (0<\theta<1)$$

这就是泰勒定理(Ⅱ)。

2.7 泰勒级数 马克劳林级数

在前面所说的泰勒展开式中，当满足$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ 的条件时，函数 $f(x)$可展开成为下面那样的级数。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

这就是用$(x-a)$的幂级数表示的函数。将其称为“泰勒级数”。写得更清楚一些，成为如下所示的级数。

$$f(x)=\frac{f(a)}{0!}(x-a)^0+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots$$

而 $0!=1,(x-a)^0=1$，故

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)\cdot(x-a)^3+\cdots$$

下面，简单叙述一下有关马克劳林级数。

在此省略马克劳林定理，因为此定理要判断是否 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$，一般比较困难。若对于 n 的全部值，$f^{(n)}(x)$ 有界，换言之，$|f^{(n)}(x)|$ 不超过某一定值时，因 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ 成立，$f(x)$ 可以展开成马克劳林级数。这时，该级数可以写成下面那样。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

这就是有名的马克劳林级数。将函数展开成马克劳林级数的过程称为“马克劳林展开”。

2.8 使用无穷级数求 π

通过计算圆内接和外切正多边形的周长，π 的近似值可求到小数点后 35 位。这花费了很长的时间，而由于无穷级数的发现，使得在短时间里 π 的近似值的位数迅速增加。

下表列出了 π 的近似值的位数的进展情况

使用无穷级数计算的 π 的近似值

计　算　人	发表年代	位数
A. 牛顿(1642—1727)	1665	16
A. 夏普(1651—1742)	1706	72
J. 马庭(1680—1752)	1706	100
D. 拉克尼(1660—1734)	1719	127
维加(1754—1802)	1794	140
W. 卢瑟福(1798—1871)	1824	152
J. 达泽(1824—1861)	1844	205
T. 克拉森(1801—1855)	1847	248
W. 卢瑟福(1798—1871)	1853	440
利希特尔	1855	500
W. 山克斯(1812—1882)	1874	527
福克森	1946	620
福克森	1947(1 月)	710
福克森(使用计算机)	1947(9 月)	808

该表是参考了许多书写出来的。在 1706—1947 年的 240 年左右，π 近似值的位数从 72 位增加到 808 位，增长迅速。

山克斯所计算的 707 位是用台式计算机计算的，528 位以后不正确，是由弗尔德林发表的。

另外，在概率论方面非常有名的 D. 莫尔干发现，山克斯的结果中 7 非常少见。他说“出现这种情况的概率是 $\frac{1}{45}$，也就是说算错的可能性很大”。

这也可以说是山克斯进行计算失误的一个证据吧。

2.9 π 的计算中使用的展开式

前面讲述了函数 $f(x)$ 的展开式。若考虑应用的话，首先应该是非常简单的三角函数，下面把它表示出

来。

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad(|x|<\infty)$$

$$=(-1)^0\frac{x^1}{1!}+(-1)^1\frac{x^3}{3!}+(-1)^2\frac{x^5}{5!}+(-1)^3\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\therefore\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(|x|<\infty)$$

$$=(-1)^0\frac{x^0}{0!}+(-1)^1\frac{x^2}{2!}+(-1)^2\frac{x^4}{4!}+(-1)^3\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

$$\therefore\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

下面是自然对数的底 e 的展开式。

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

许多数学家发现了各种各样的 π 的展开式。自然，π 的近似值的位数稍增加一点就费尽了不少心血。

在此介绍一些他们的展开式。

J. 达泽在 1844 年 20 岁的时候，使用了下面的公式，将 π 的值计算到小数点后 205 位。

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

这里，$\arctan\frac{1}{2}$ 与 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 相同。

下面的公式是格利高利于 1671 年、莱布尼兹于 1673 年分别发现的。

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

该公式收敛慢，计算不方便，此后当一发现收敛快的公式，就用那些方法了。

欧拉在 1737 年利用反函数 $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$，根据格利高利的展开式将右边展开为

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots$$

此式是著名的欧拉级数。

另外 $\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ 与 $\tan\frac{1}{4}=1$ 相同，也可以写成 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$。

下面的公式称为“赫顿(1737—1823)公式”，其作者因著有数表和数学辞典而非常有名。

$$\frac{\pi}{4}=3\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{5}{99}$$

下面的公式是根据欧拉公式考虑的，称为“马庭(1680—1752)公式”。

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right\}$$

此公式是在 1706 年发现的。

在 π 的计算中，这个公式利用的最多，在用计算机将 π 的近似值计算到 2035 位时也用了这个公式。

山克斯在 1873 年使用马庭公式将 π 值计算到 707 位，但与计算机计算的结果相比较时，到 527 位为

止是正确的，以后的结果有误差。

除此之外还有各式各样的公式，但这些公式大概都比不过计算机上使用的马庭公式。

2.10 弧度法中的 π

以度作为测量角的单位，称为“度数法”。1 周的角度有 360°，1°有 60′，1′有 60″，这样的测量方法不用说大家都是知道的。

在此，360°称为“360 度”，60′称为“60 分”，60″称为“60 秒”。与时间相同是 60 进位法。

除了这种度数法外，还有称为“弧度法”的测量角度的方法。

在图 2-18 中，圆 O 的半径为 r，取沿着圆周的$\overset{\frown}{AB}$（弧 AB）的长度为 r 时，将这时的中心角 AOB（∠AOB）定为 1 弧度（1rad）。

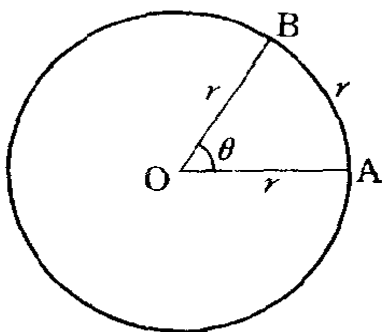


图 2-18

将这样测量角度大小的方法称为“弧度法”。在读或写时，弧度一般不带单位，因此，有“∠AOB＝1”。

在此计算一下 1 弧度相当于几度。

因为中心角的大小与弧的长度成正比，所以，

$$\theta : 360° = r : 2\pi r = 1 : 2\pi$$

$2\pi r$ 是半径为 r 的圆的周长。

解比例式中的 θ，

$$\theta = 360° \div 2\pi = 180° \div \pi = \frac{180°}{\pi}$$

由 $\theta = \frac{180°}{\pi}$，则 $1\text{rad} \approx 57°17'44.8''$。然而一般不大使用这个值。与其相比，1 弧度(rad) $= \frac{180°}{\pi} \Longleftrightarrow 180° = \pi\text{rad}$ 可能更重要。

因为 180 度是 π(弧度)，所以可以说"180°是 π"，"90°是 $\frac{\pi}{2}$"，"45°是 $\frac{\pi}{4}$"。进而也可以说"360°是 2π"。

在计算圆周率的近似值中，"弧度法"是重点采用的方法，与 π 息息相关。

2.11 三角函数与弧度法的关系

由于用弧度法表示角的大小，所以将用的较多的弧度法的角的三角函数(有时也称为三角比)示于下表。

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度法 / 三角函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

在求 π 的公式中有 $\arctan a$ 这种形式，它表示使 $\tan\theta=a$ 成立时的 θ。

在公式左边的 $\frac{\pi}{4}$ 除表示 45°外，也可以考虑为“π 除以 4”($\pi\div4$)”。

另外，$\tan 45°=\tan\frac{\pi}{4}=1$，除 $\tan\frac{5}{4}\pi=1$ 以外，正切(tangent)等于 1 的角还有许多，取其中一个作为代表，称其为“主值”。

这样，取 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}(=45°)$，仅仅规定 $\frac{\pi}{4}$ 这一个值。

在计算 π 的近似值的展开式中常使用 $\frac{\pi}{4}$，这大概是因为 $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 的缘故，即由于 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ 的缘故。

想必人们很早就开始使用弧度、反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$ 等。

第三章

利用π的计算

3.1 半径 r 的圆周(长)$2\pi r$

半径为 r 的圆周的长度是 $2\pi r$，当半径＝1 时，圆周的长度为 2π。

直径等于 1(半径为 0.5)的圆周长度就是 π。

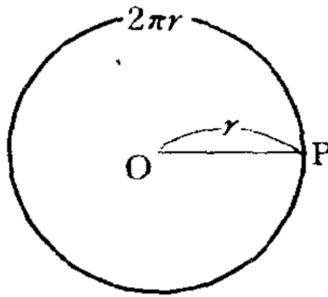


图 3-1

圆周率 π 本是圆周长度与直径的比，因此，圆周长是 $2\pi r$。

下面，应用这个比例，试着将其用于与圆有关的计算。

3.2 半径 r 中心角 θ 的弧长

中心角的大小与弧(圆周的一部分)的长度成正比。因此,下面的比例式成立:

$$\theta : 360 = \overset{\frown}{AB} : 2\pi r$$

用此式解$\overset{\frown}{AB}$时,有

$$\overset{\frown}{AB} = \theta \times 2\pi r \div 360 = 2\pi r \times \frac{\theta}{360}$$

当 $\theta = 120°$ 时,$\overset{\frown}{AB} = 2\pi r \times \frac{120}{360} = 2\pi r \times \frac{1}{3}$,因此,$\overset{\frown}{AB}$的长度是圆周的$\frac{1}{3}$。

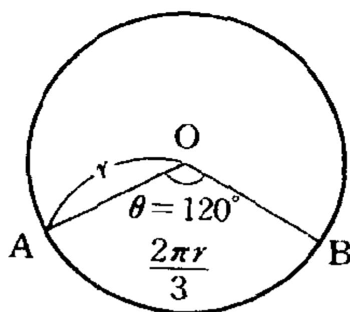


图 3-2

假如 $r = 3$(厘米),圆周长度 $2\pi r = 2 \times 3 \times \pi = 6\pi$(厘米),$\overset{\frown}{AB}$ 弧的长度则为 $\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 3 = 2\pi$(厘米)。

对用弧度法求圆周长度和弧的长度了解之后,就会体验到弧度法的难得可贵之处。这以后还要加以说明。

规定在比例式中省略 180°等中的符号°(度)。

3.3 圆的面积

半径为 r 的圆的面积，可以用 πr^2 来求。

因此，当半径确定时，求圆面积就变得简单了。

由此式可以看出，圆的面积与半径的平方成正比。

此时的比例系数为 π。

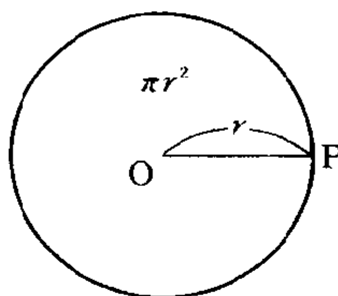


图 3-3

圆周率 π 是圆周的长度与直径的比，也是圆的面积和半径平方的比。

圆的面积为 S，半径为 r 时，圆的面积可用 $S=\pi r^2$ 表示。

过去求圆面积的方法，在欧洲和日本的江户时代，其想法都是相同的，都是计算许多细长三角形的面积之和。

图 3-4 是将圆分为 12 等分，大致接近于平行四边形的面积。

将这种分割逐渐增加到 24，48，……等时，圆的面积即成为近似等腰三角形的细长针状的三角形面积的总和。因此，作为极限，认为

(半圆的周长)×(半径)=(圆的面积)

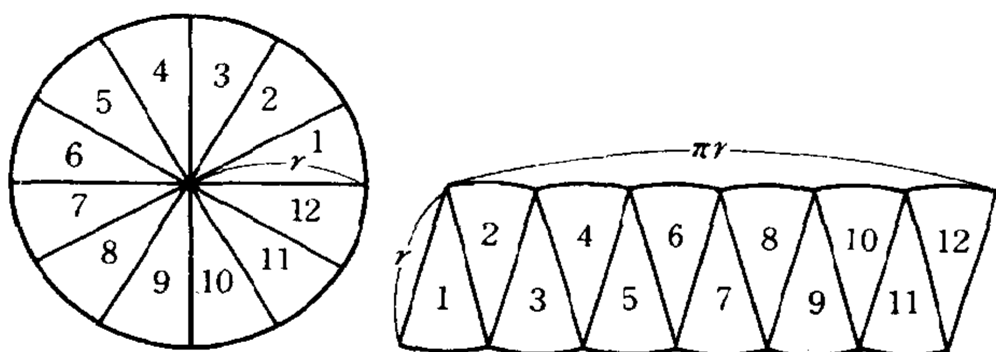


图 3-4

故求圆面积的公式是$\frac{2\pi r}{2}\times r=\pi r^2$。

3.4 扇形的面积

由两个半径 OA,OB,以及弧 AB($\overset{\frown}{AB}$)围成的图形称为“扇形”。

将 AOB 角($\angle AOB$)称为中心角,而扇形面积与中心角的大小成正比,如用 S 表示扇形 OAB 的面积时,有 $S:\pi r^2=\theta:360$。

用上式解 S,则 $S=\pi r^2\times\theta\div 360=\frac{\pi r^2\theta}{360}$,这就是求扇形面积的公式。

四分之一圆($\theta=90°$)的扇形面积为

$$S=\frac{90\pi r^2}{360}=\frac{1}{4}\pi r^2$$

其半径为 4(厘米)时,$S=\frac{1}{4}\pi\times 4^2=\frac{1}{4}\times 16\times\pi$

由此可得 $S=4\pi$(厘米^2)。

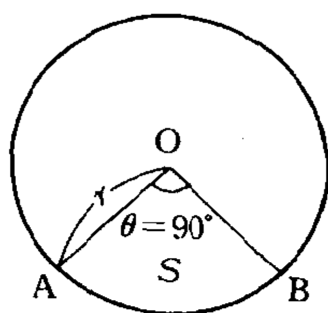


图 3-5

3.5 弓形的面积

请看图 3-6，线段 AB（直线的一部分称为线段）即为弦。

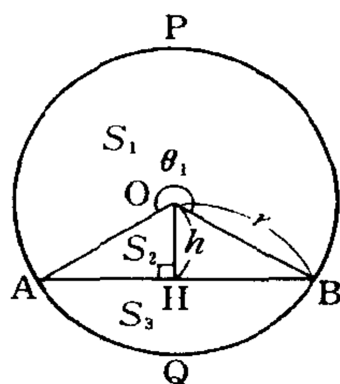


图 3-6

AB 弦将圆分为 APB 和 AQB 两个部分，将此两个部分分别称为“弓形 APB”和“弓形 AQB”。

换言之，所谓的弓形就是圆周的一部分与弦所形成的图形。

大概是由于与射箭所用的弓的形状相近似，故而得此名称的吧！

已知半径和中心角，采用上述方法，即可求出弓形的弧长。下面考虑求弓形面积。

弓形 APB 的面积是扇形 APB 和三角形 OAB 的面积之和。扇形部分的面积可用前面所介绍的方法求出，再求出三角形 OAB 的面积的话，弓形 APB 的面积就很容易求出了。

设从圆心 O 至 AB 弦的垂线长度为 h，AB 弦的长度为 $2\sqrt{r^2-h^2}$，根据 AB×OH÷2 这一求三角形面积的数学式，三角形 OAB 的面积为

$$\triangle OAB=2\sqrt{r^2-h^2}\times h\div 2=h\sqrt{r^2-h^2}$$

因此，当圆的半径为 2(厘米)，$\angle AOB=120°$时，$\theta_1=360°-120°=240°$。扇形 APB 的面积用 S_1 表示，根据 $S_1:\pi r^2=240:360$ 这一关系解 S_1，$S_1=\frac{240}{360}\pi r^2=\frac{2}{3}\pi r^2$，另外，三角形 OAB 的面积 $S_2=h\sqrt{r^2-h^2}$，因此，弓形的面积 S 为

$$S=S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi r^2+h\sqrt{r^2-h^2}$$

当半径为 2(厘米)，$h=1$(厘米)时，弓形 APB 的面积为

$$S=\frac{2}{3}\pi\cdot 2^2+1\times\sqrt{2^2-1^2}=\frac{2\times 4}{3}\times\pi+\sqrt{3}$$
$$=\left(\frac{3}{8}\pi+\sqrt{3}\right)(\text{厘米}^2)$$

另外，从圆面积中减去弓形 APB 的面积即可求出弓形 AQB 的面积 S_3：

$$S_3=\pi r^2-(S_1+S_2)=\pi r^2-\left(\frac{2}{3}\pi r^2+h\sqrt{r^2-h^2}\right)$$

当半径为 2(厘米)，$h=1$(厘米)时，

$$S_3=4\pi-\left(\frac{8}{3}\pi+\sqrt{3}\right)=\frac{12-8}{3}\pi-\sqrt{3}$$

$=\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$（厘米^2）

前节所介绍的扇形的计算方法是一般的方法。有时显得麻烦。当扇形的中心角为 90°时，它是四分之一圆，因此扇形面积为圆面积的$\frac{1}{4}$，其值为$\frac{1}{4}\pi r^2$，很快可以求出来。

同样可以很快求出在弓形面积中所涉及到的扇形 APB 的面积，由于中心角为 240°，其面积即为$\frac{2}{3}\pi r^2$。

3.6 椭圆的面积

先对图 3-7 进行说明，O 称为椭圆的中心，A，A′，B，B′称为“顶点”，AA′称为“长轴”，BB′称为“短轴”。

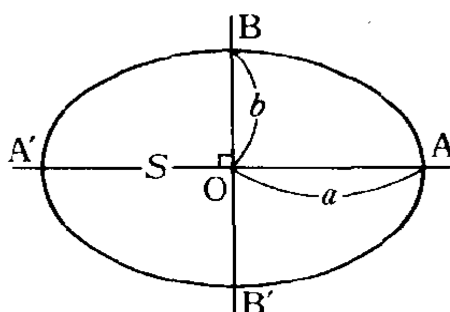


图 3-7

另外，将长的 OA=a 称为“长半径”，将短的 OB=b 称为“短半径”。

也有把椭圆叫“长圆”的。

当 $a=b$ 时，椭圆就是圆。

将椭圆的面积记为 S 时，可用 $S=\pi ab$ 的公式求椭圆的面积。$a=b$ 时，当然 S 就表示圆的面积了。

当长半径 $a=3$（厘米），短半径 $b=2$（厘米）时，其

面积 $S=3\times2\times\pi=6\pi$(厘米^2)。

在到目前为止的例子中,如圆周的长度、弧的长度、圆的面积、扇形的面积、弓形的面积、椭圆的面积等,全都使用了圆周率。

这样,π 就不仅是计算圆,也是计算椭圆形等所不可缺少的数。

3.7 球的表面积和体积

我们已经知道,球(亦称为球体)的表面积可用 $S=4\pi r^2$ 计算。

此值正好是相同半径 r 的圆面积的 4 倍,由于 4 是整数,所以计算非常简单。

球的体积是由 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 求出的。

将此式分解看,就变成 $\dfrac{r}{3}\times4\pi r^2$,所以它和以球的表面积作为底面、以 r 作为高的锥体(圆锥或角锥)的体积完全相同。

(圆锥的体积)=(底面积)×(高)÷3

底面积用 S 表示,高用 h 表示,则体积 V 由 $V=S\times h\div3=\dfrac{Sh}{3}$ 求出。

底面是三角形,四边形,……等多边形时,计算时用不着 π,但底面是圆或椭圆那样的圆锥或椭圆锥时,求体积就必须用到 π。

下面具体计算一下球的体积和表面积。

半径为 2 厘米的球的表面积 S 是

$S=4\times\pi\times2^2=16\pi$(厘米^2)

相同半径的球的体积 V 是

$$V=\frac{4}{3}\times\pi\times2^3=\frac{32}{3}\pi(\text{厘米}^3)$$

3.8 圆锥的体积和表面积

前面叙述过，不管是角锥还是圆锥，锥体的体积都由底面积 S 和高 h，再用公式 $V=\frac{Sh}{3}$ 计算。

在角锥中，体积与 π 无关，所以这里只考虑圆锥。

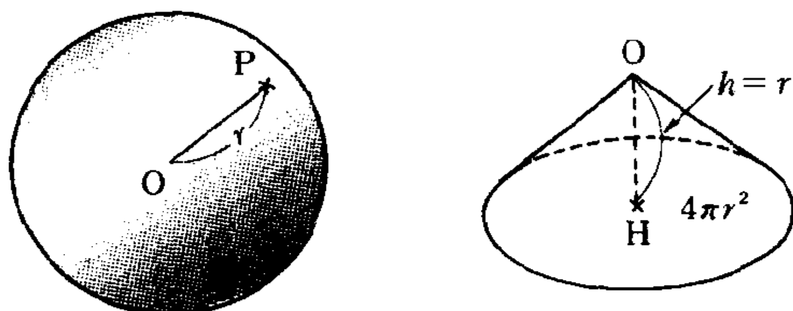


图 3-8

底面半径用 r 表示，高用 h 表示，圆锥的体积 V 是 $V=\pi r^2\times h\div3$，π 仍然是必要的。

在这个式子中，h 用 r 替换，底面积用 $4\pi r^2$ 表示，则 $V=\frac{1}{3}\times4\pi r^2\times r=\frac{4}{3}\pi r^3$，它与前面所求的球的体积相同。

重新写一下，$V=\frac{\pi r^2h}{3}\Rightarrow\frac{4\pi r^3}{3}$。

其次是求锥体的表面积。虽然角锥与 π 无关，但若求圆锥的表面积，π 就变得必要了。

圆锥的底面是圆，侧面是曲面。我们先画出展开图。

图 3-9 左边为圆锥的立体图，将此图分割展开，画出展开图，就变成右边那样。

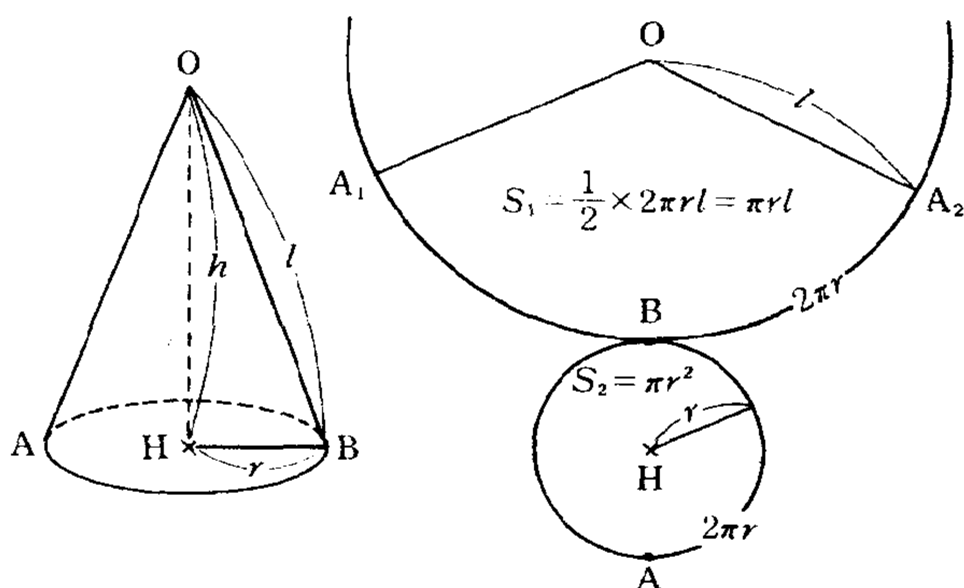


图 3-9

由展开图可知，侧面的形状是弧长为 $2\pi r$、半径为 l 的扇形，所以，它的面积 S_1 为

$$S_1=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi rl$$

另外，底面积 S_2 是半径为 r 的圆，因而 $S_2=\pi r^2$。

因此，圆锥的整个表面积（也称为全表面积）S 是 S_1 与 S_2 之和

$$S=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)$$

下面求具体的圆锥的表面积。

底面半径为 1（厘米），高为$\sqrt{3}$（厘米），在左图中 $OA=OB=l$，在右图中 $l=OA_1=OA_2$，这个 l 称为“母线”或者“斜高”。

在此，$l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$（厘米），圆锥的体积为

$$V=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi\times 1^2\times\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi(\text{厘米}^2)$$

圆锥的表面积为

$$S=\pi r(l+r)=\pi(2+1)=3\pi(\text{厘米}^2)$$

可见，π 仍然是重要的。

3.9 圆台的体积和表面积

用平行于底面的平面切割圆锥时，上部分仍是圆锥，下部分成为圆台。

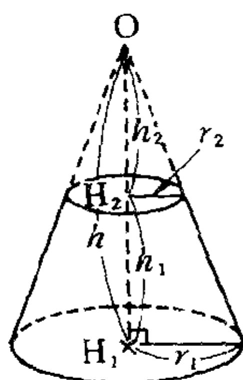


图 3-10

圆台的上下两个平面是平行的，侧面是圆锥的一部分，它显然是曲面。

切割高度为 h 的圆锥，做成圆台，将下底面的半径记这 r_1，上底面的半径记为 r_2；将高度 h 分为两个，圆台的高度记为 h_1，上圆锥部分的高度记为 h_2。

首先，由于两个相似形的面积比是相应项之比的平方，体积比是相应项之比的立方，参见图 3.10 有

$$(\text{圆台的体积})=\frac{\pi}{3}r_1{}^2h-\frac{\pi}{3}r_2{}^2h_2$$

$$=\frac{\pi}{3}[r_1{}^2(h_1+h_2)-r_2{}^2h_2]$$

$$=\frac{\pi}{3}(r_1{}^2h_1+r_2{}^2h_2-r_2{}^2h_2)$$

$$=\frac{\pi}{3}[r_1{}^2h_1+h_2(r_1{}^2-r_2{}^2)] \quad ①$$

另外，由 $h_2:h=r_2:r_1$ 有 $r_1h_2=r_2h$，

$$r_1h_2=r_2(h_1+h_2),r_1h_2-r_2h_2$$

$$=r_2h_1$$

$$h_2(r_1-r_2)=r_2h_1,\quad \therefore h_2=\frac{r_2h_1}{r_1-r_2} \quad ②$$

将②代入①，

$$(\text{圆台的体积})=\frac{\pi}{3}\left[r_1{}^2h_1+\frac{r_2h_1}{r_1-r_2}(r_1{}^2-r_2{}^2)\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}[r_1{}^2h_1+r_2h_1(r_1+r_2)]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h_1(r_1{}^2+r_1r_2+r_2{}^2)$$

由此可知，如果知道上底面、下底面的半径和圆台的高度，即可求出圆台的体积，在此式中也有 π。

下面求圆台的表面积（全表面积）。这样的问题用展开图描绘比较容易理解。

因此，参看图 3-11。

因为上底面和下底面都是圆，所以其面积为 $\pi r_2{}^2+\pi r_1{}^2=\pi(r_2{}^2+r_1{}^2)$，侧面面积为

$$(\text{侧面的面积})=\pi r_1l-\pi r_2l_2$$

$$=\pi[r_1(l_1+l_2)-r_2l_2]$$

$$=\pi[r_1l_1+l_2(r_1-r_2)] \quad ①$$

另外，因为 $r_2:r_1=l_2:l$

及 $r_2:r_1=l_2:(l_1+l_2)$

有 $r_2(l_1+l_2)=r_1l_2$

$r_2l_1+r_2l_2=r_1l_2,r_2l_1=l_2(r_1-r_2)$

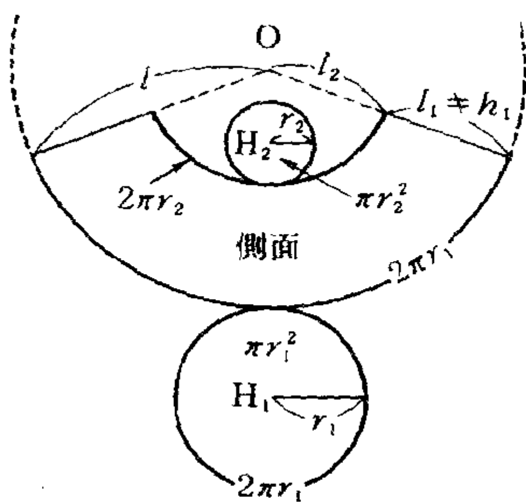


图 3-11

$$\therefore l_2=\frac{r_2 l_1}{r_1-r_2} \qquad ②$$

将②式代入①式，有

$$(\text{侧面的面积})=\pi\left[r_1 l_1+\frac{r_2 l_1}{r_1-r_2}(r_1-r_2)\right]$$
$$=\pi(r_1 l_1+r_2 l_1)$$
$$=\pi l_1(r_1+r_2)$$

由此可知，为了求圆台的表面积，可求出上底面和下底面的半径及斜高（不是高度，而是母线的一部分），即可像下面那样求表面积。

$$(\text{表面积})=(\text{上、下两个圆的面积})$$
$$+(\text{侧面积})$$
$$=\pi(r_2^2+r_1^2)+\pi l_1(r_1+r_2)$$
$$=\pi(r_1 l_1+r_2^2+r_1^2+r_2 l_1)$$
$$=\pi\{r_1(l_1+r_1)+r_2(l_1+r_2)\}$$

在此，π 也起着重要作用。

重新整理写出圆台的体积 V 和表面积 S 的计算公式：

$$V=\frac{\pi h_1}{3}(r_1{}^2+r_1r_2+r_2{}^2),$$

$$S=\pi[r_1(l_1+r_1)+r_2(l_1+r_2)]$$

根据上述公式来计算，实际的圆台的体积和表面积。

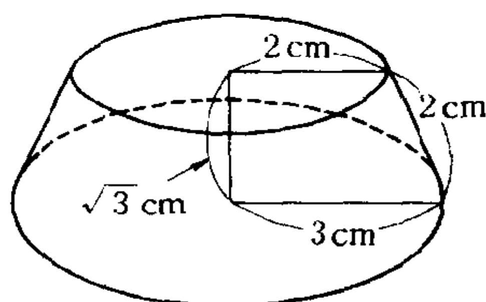


图 3-12

如图 3-12 所示的圆台，其上底面的半径为 2(厘米)，下底面的半径为 3(厘米)，高度为$\sqrt{3}$(厘米)，斜高为 2(厘米)。

体积V的计算为

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi h_1}{3}(r_1{}^2+r_1r_2+r_2{}^2)\\&=\frac{\pi}{3}\times\sqrt{3}(3^2+3\times2+2^2)\\&=\frac{\pi}{3}\times\sqrt{3}(9+6+4)\\&=\frac{19\sqrt{3}\pi}{3}(\text{厘米}^3)\end{aligned}$$

表面积S的计算为

$$\begin{aligned}S&=\pi[r_1(l_1+r_1)+r_2(l_1+r_2)]\\&=\pi[3(2+3)+2(2+2)]\\&=\pi(3\times5+2\times4)\\&=\pi(15+8)\\&=23\pi(\text{厘米}^2)\end{aligned}$$

第四章

弧度法 扇形 三角函数和π

4.1 弧度法和弧长

用弧度法表示中心角时，弧的长度可以简单地表示出来。

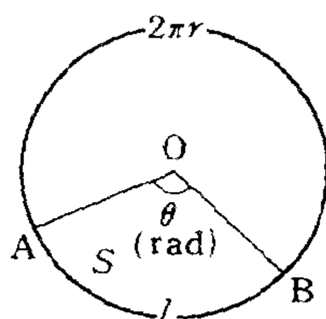


图 4-1

在图 4-1 中，取中心角 AOB（$\angle AOB$）的大小为 θ（弧度），弧 AB（$\overset{\frown}{AB}$）的长度为 l 时，因为中心角的大小和弧的长度成正比，即

$$\theta : 2\pi = l : 2\pi r \qquad (360^\circ = 2\pi \text{rad})$$

用此式解 l，则

$$l=\frac{\theta\times 2\pi r}{2\pi}=r\theta$$

因此，使用弧度法表示角时，

（弧的长度）=（半径）×（中心角）

这样表示相当方便，而且十分简单。

可能会有人认为看不见 π 是件好事，但是 π 仍然存在。

我们举个例子分析一下。

用弧度法表示中心角的大小，$\theta=\frac{2}{3}\pi$，取半径 $r=30$ 厘米，则弧的长度为

$$l=r\theta=30\times\frac{2}{3}\pi=20\pi\ \text{厘米}$$

从此式可知，以为表面上 π 的消失使得式子简单了，实际上这是一种错误的理解。在 θ 中，显然含有 π。

4.2 弧度法及扇形面积

在图 4.1 中，扇形 AOB 的面积用 S 表示。

中心角的大小与扇形面积成正比，当中心角用弧度法表示为 $\angle AOB=\theta$ 时，有

$$S:\pi r^2=\theta:2\pi \quad （一周的弧度为 2\pi）$$

用上式解 S，由 $S=\frac{\pi r^2\theta}{2\pi}$，故 $S=\frac{r^2\theta}{2}$，从而可以简单地表示出扇形的面积。

虽然式子中没有 π，让人安心，但或多或少会使人感到单调了一些。

下面，举个例子分析一下。

用弧度法表示中心角，$\theta=\frac{2}{3}\pi$，半径 $r=6$（厘米）

时，扇形 AOB 的面积 S 为

$$S=\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{2}{3}\pi=6\times 2\pi=12\pi(\text{厘米}^2)$$

在扇形的面积中还是出现了 π。由此可见，π 像隐士一样时隐时现。

归根到底，还是不能分开弧的长度和扇形面积等与 π 的联系。

4.3 正弦曲线的描绘方法及反正弦函数

前面比较了表达角度的弧度法和度数法，而且，使用弧度法可以正确地画出三角函数的图形。

π 有各种各样的近似值，但图形只不过是个简图而已，因此，采用 $\pi\approx 3.14$ 就足够了。

三角函数中有 6 种（$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\operatorname{cosec} x$），它们都是周期函数，所以 x 的值从负无穷大到正无穷大（$-\infty<x<+\infty$），没有全部画出的必要。

因此，只画出正弦曲线在闭区间$[0,2\pi]$的图形。闭区间$[0,2\pi]$指的是 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$。

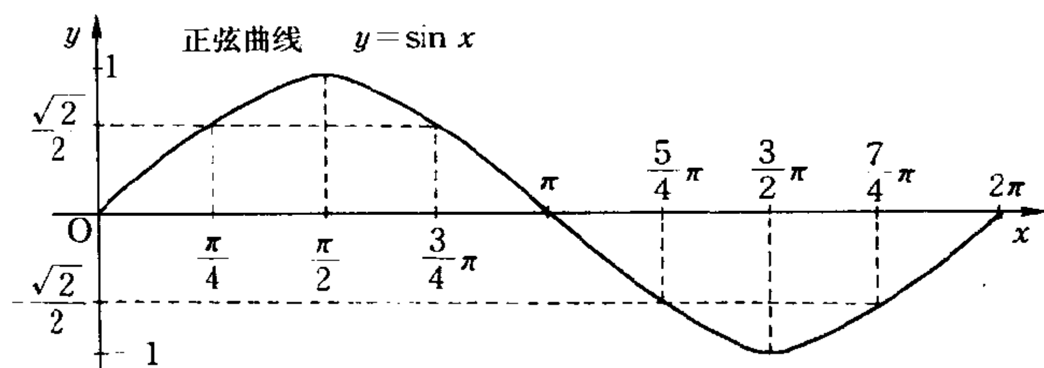


图 4-2

图 4-2 就是正弦曲线的简图。此图简单地表示了

$y=\sin x$。由图，立刻可知 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{3}{4}\pi,\sin\frac{5}{4}\pi=\sin\frac{7}{4}\pi$。

正弦函数是“周期函数”，周期为 2π。

所谓周期等于 2π，意味着 x 的值相差 2π 时，$y=\sin x$ 的值相等。

这样图 4-2 可向 x 轴的正负方向无限延伸。

正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数写成 $y=\sin^{-1}x$，或 $y=\arcsin x$。$\sin^{-1}x$ 读作反正弦 x(inverse $\sin x$)。

反正弦函数的图形，如图 4-3 所示，变成了竖的形状。

此函数的 x 值在闭区间 $[-1,1]$ 上，y 的值有无数个。

x 值的范围称为“定义域”，y 值的范围称为“值域”。

例如，$x=\frac{1}{2}$ 所对应的角有无穷多个。在图 4.3 中，$x=\frac{1}{2}$ 所对应的 y 值有 3 个。如果限制 y 的范围，使它只有一个值，它被称为反三角函数的主值。在这个函数中，取 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，这时，$y=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}(30°)$，只有一个值。

换句话说，当考虑主值时，正弦值为 $\frac{1}{2}$ 的角是 $\frac{\pi}{6}$，也就是 30°。

当不考虑主值时，$y=\arcsin x$ 变为多值函数。这时，对于 1 个 x 值有无数个 y 值。

与这样的函数相反，表示直线的函数 $y=ax+b$

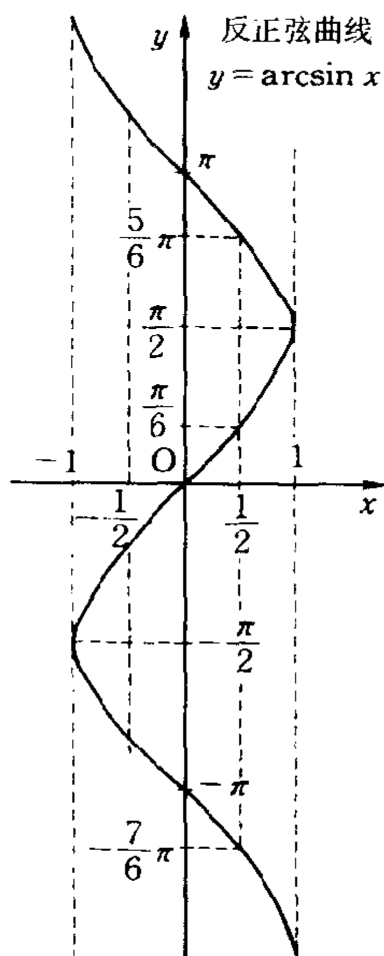


图 4-3

(a,b 为常数)称为“单值函数”,也就是说 x 和 y 是一一对应的。

4.4 余弦函数的图形及反余弦函数

$y=\cos x(-\infty<x<+\infty)$称为余弦函数。

余弦函数的定义域,即 x 的范围,是所有实数。用不等式表示,可写成$-\infty<x<+\infty$或$(-\infty,+\infty)$,是“开区间”。

但是,值域,即 y 值的范围可写成$[-1,1]$,或$-1\leqslant y\leqslant 1$,是“闭区间”。

函数 $y=\cos x$ 和 $y=\sin x$ 一样，也是周期函数，周期为 2π。之所以这样说，是因为每隔 2π，y 值都有相等值。

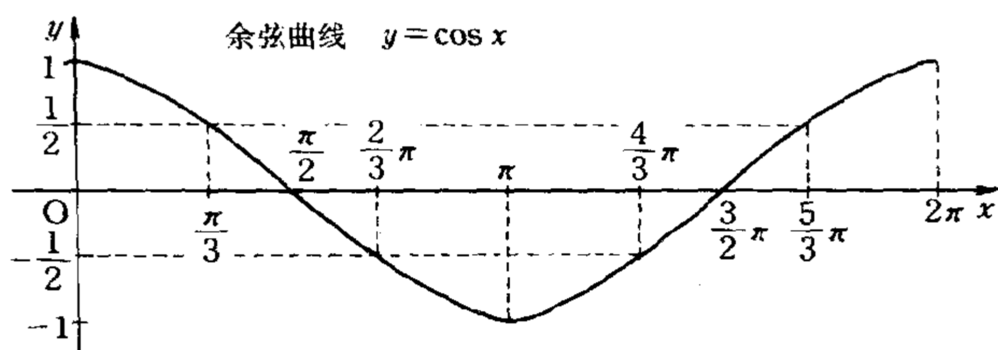


图 4-4

余弦函数的反函数是反余弦函数，可写成 $y=\cos^{-1}x$ 或 $y=\arc\cos x$。

反余弦函数的定义域为$[-1,1]$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域为所有实数，$-\infty<y<\infty$。

为确定主值，把$[0,\pi]$即 $0\leqslant y\leqslant\pi$ 作为值域，则反余弦函数的值只有 1 个。考虑主值时，无论是反正弦函数还是反余弦函数，x 和 y 都是一一对应的。

4.5 正切函数的图形和反正切函数

$y=\tan x\,(-\infty<x<\infty)$ 的图形的定义域为$(-\infty,\infty)$，也就是 $-\infty<x<\infty$，值域也是$(-\infty,\infty)$。

图 4-6 画出了从 0 到 π 一个周期的图形。正切函数也是周期函数，其周期为 π，即 $180°$。此函数的特征是不连续。

由图所示，正切函数的图形在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处，从正无穷

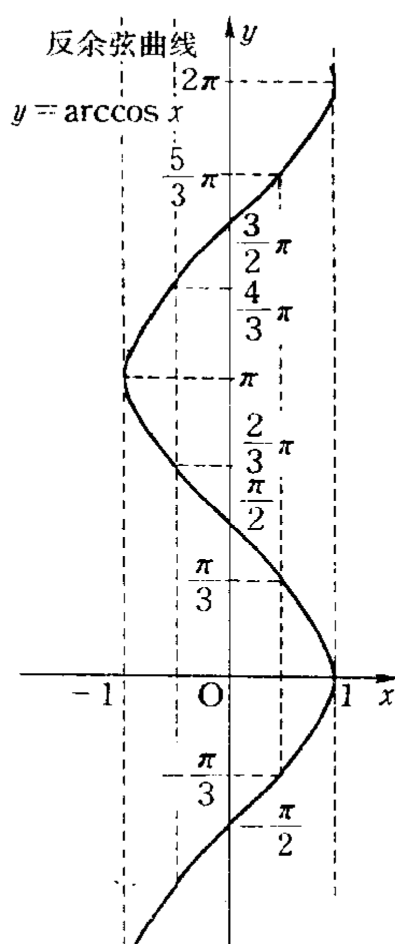


图 4-5

变化到负无穷。仔细看图可知，凡是 $x=\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍都不连续。因此，不连续点为 $x=\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi$，……。

其次，作为正切函数 $y=\tan x$ 反函数的反正切函数 $y=\tan^{-1}x(y=\arctan x)$ 的图形在 $y=\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍处不连续，所以 1 个 x 值对应无数个 y 值。

把主值定在 $-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$ 时，对应于 $(-\infty, \infty)$，即 $-\infty<x<\infty$ 的定义域，一旦决定了反正切函数的值，x 和 y 就成为一一对应的。

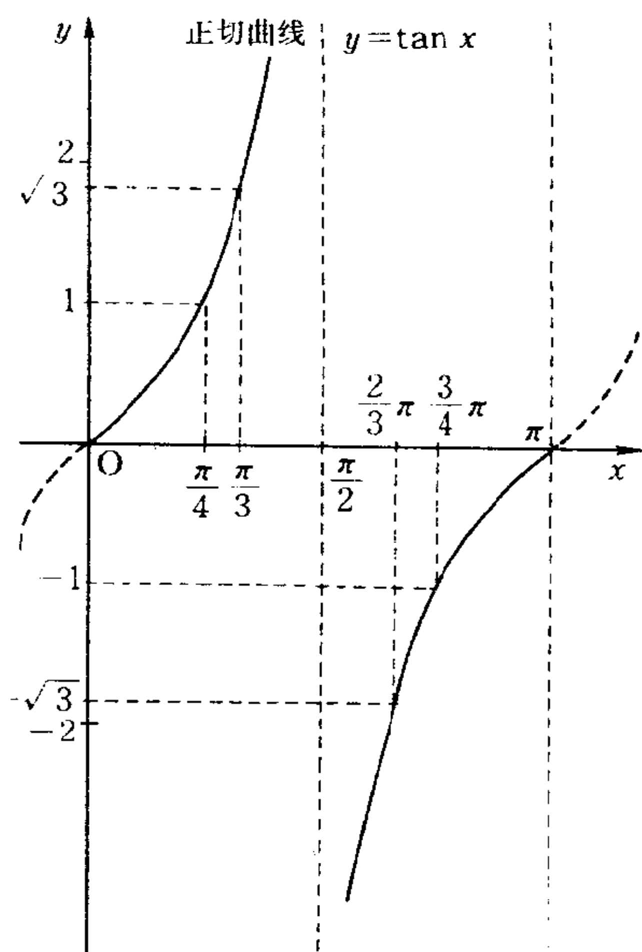


图 4-6

4.6 反正弦　反余弦　反正切函数主值

如前所述，正弦函数的反函数是反正弦函数，其主值在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，即$-\frac{1}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$上一一对应。

另外，余弦函数的反函数为反余弦函数，它的主值在闭区间$[0,\pi]$，即$0\leqslant \operatorname{arc} \cos x\leqslant \pi$上一一对应。

进而，正切函数的反函数为反正切函数，它的主值在开区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc} \tan x<\frac{\pi}{2}$上一一对

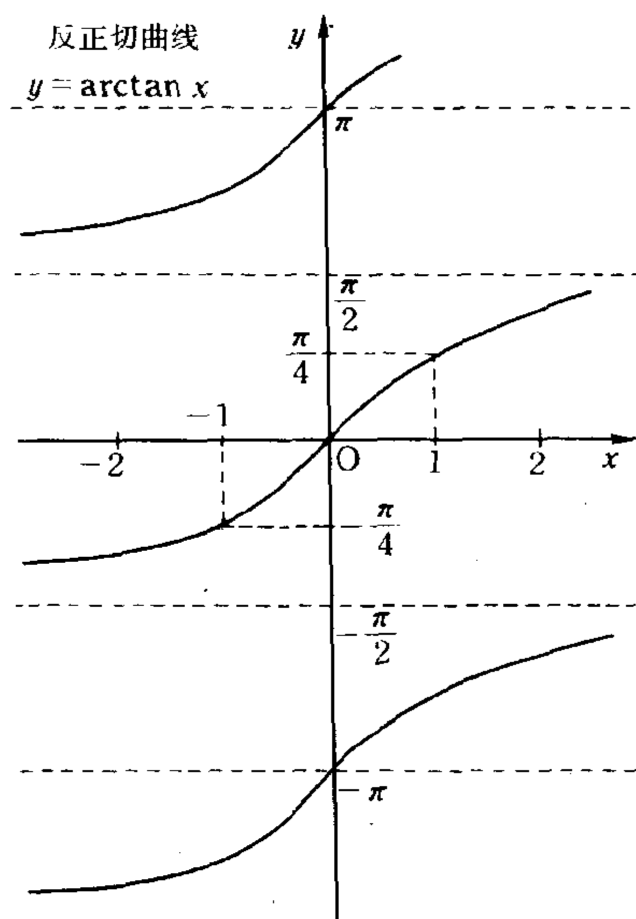


图 4-7

应。

因此，为清楚地说明，重新用图表示。如图 4-8，4-9，4-10 所示。

接下去画出的图形可能稍微难了些。它们是余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\operatorname{cosec} x$ 和作为它们的反函数的反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，反正割函数 $y=\operatorname{arcsec} x$，以及反余割函数 $y=\operatorname{arccosec} x$ 的曲线。如图 4-11—4-16 所示。

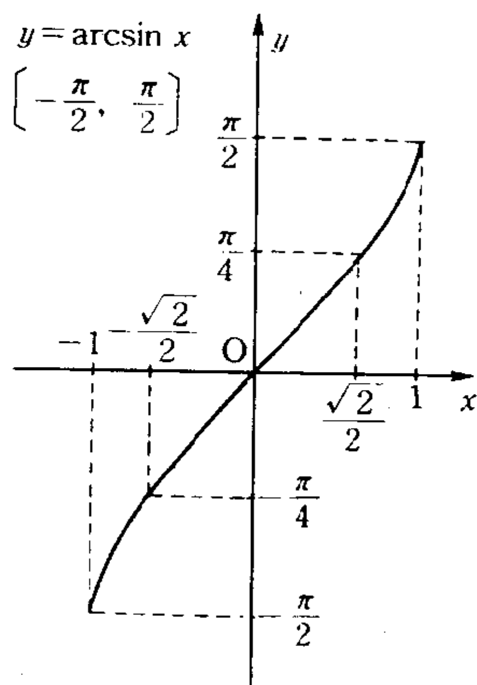

$y=\arcsin x$
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
y
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
-1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
x
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$

图 4-8

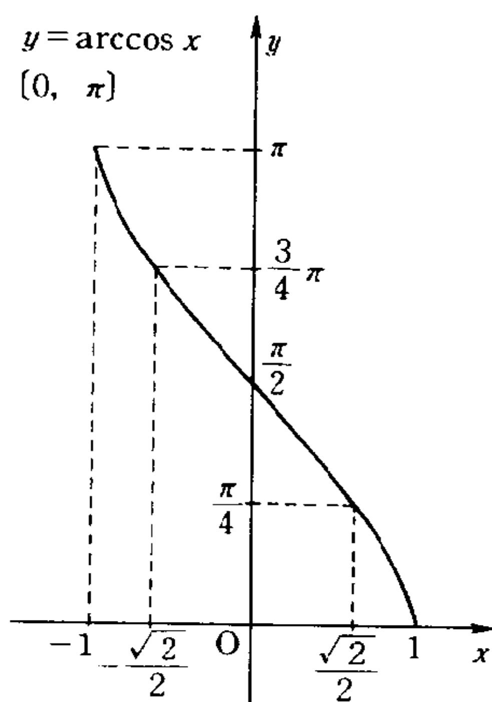

$y=\arccos x$
$[0, \pi]$
y
π
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
-1
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
O
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
x

图 4-9

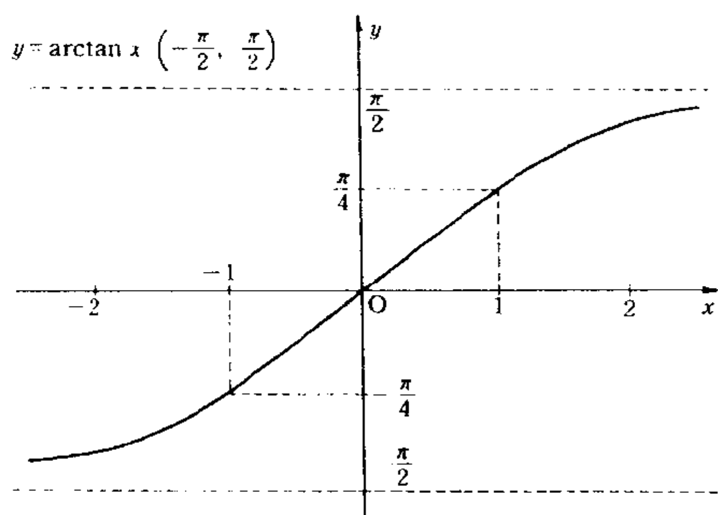

$y = \arctan x \ \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
y
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
-1
-2
O
1
2
x
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$

图 4-10

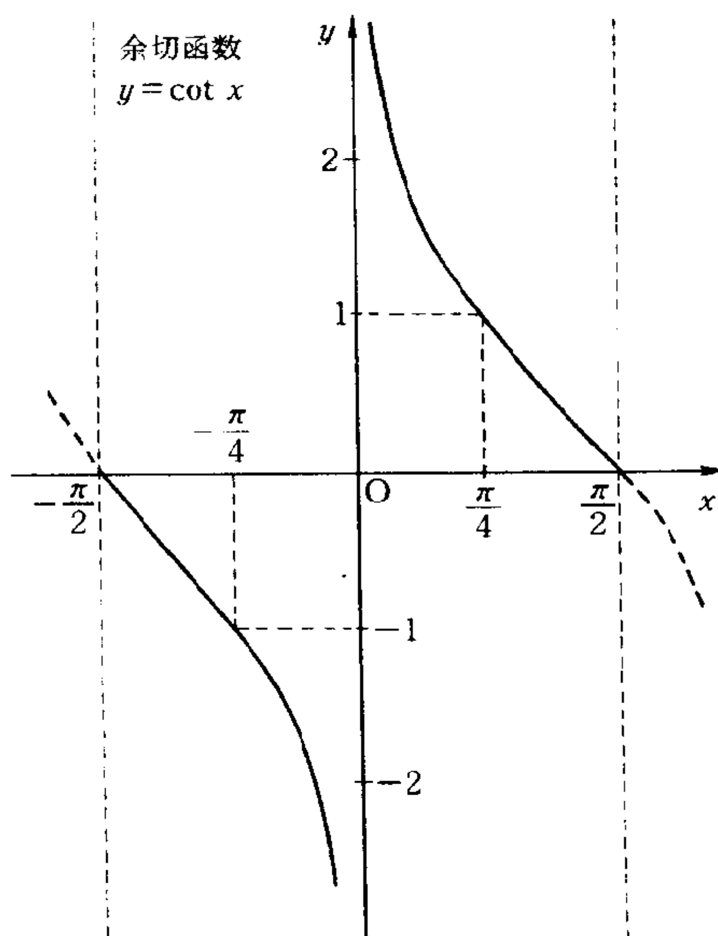

余切函数
$y = \cot x$
y
2
1
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
-2

图 4-11

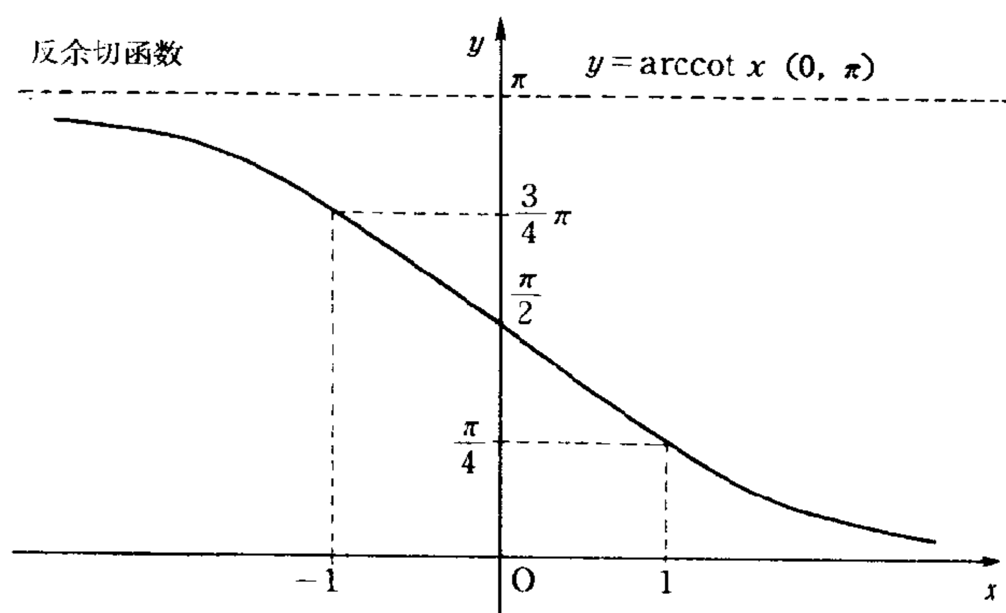

反余切函数
$y=\text{arccot}\ x\ (0,\ \pi)$
y
π
$\frac{3}{4}\pi$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
−1
O
1
x

图 4-12

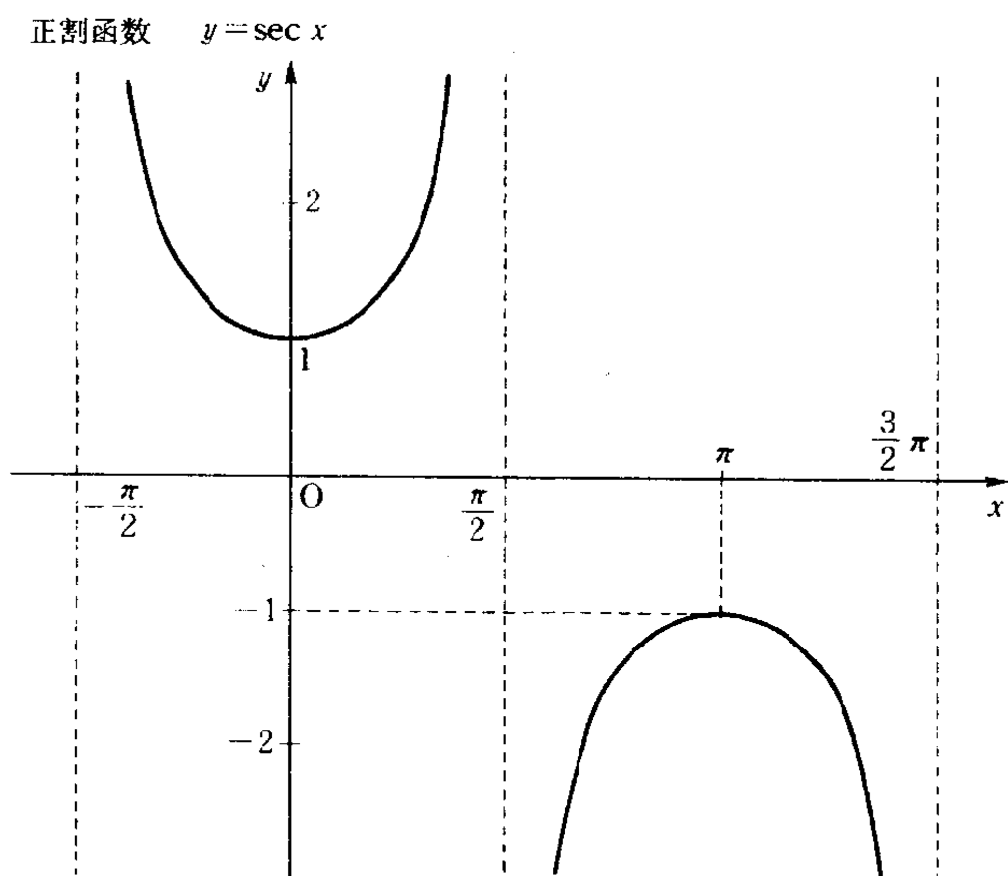
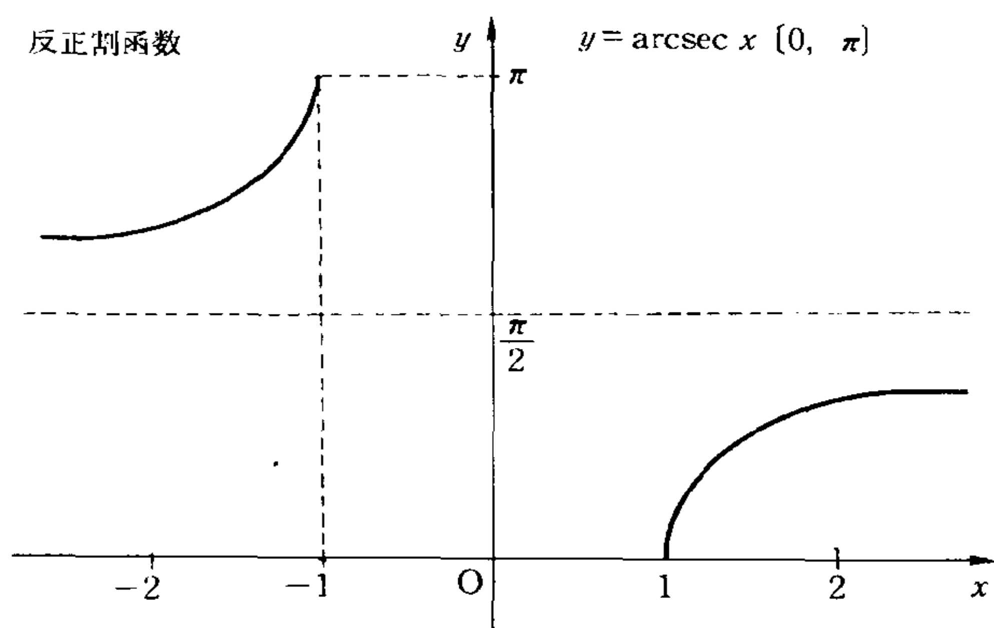
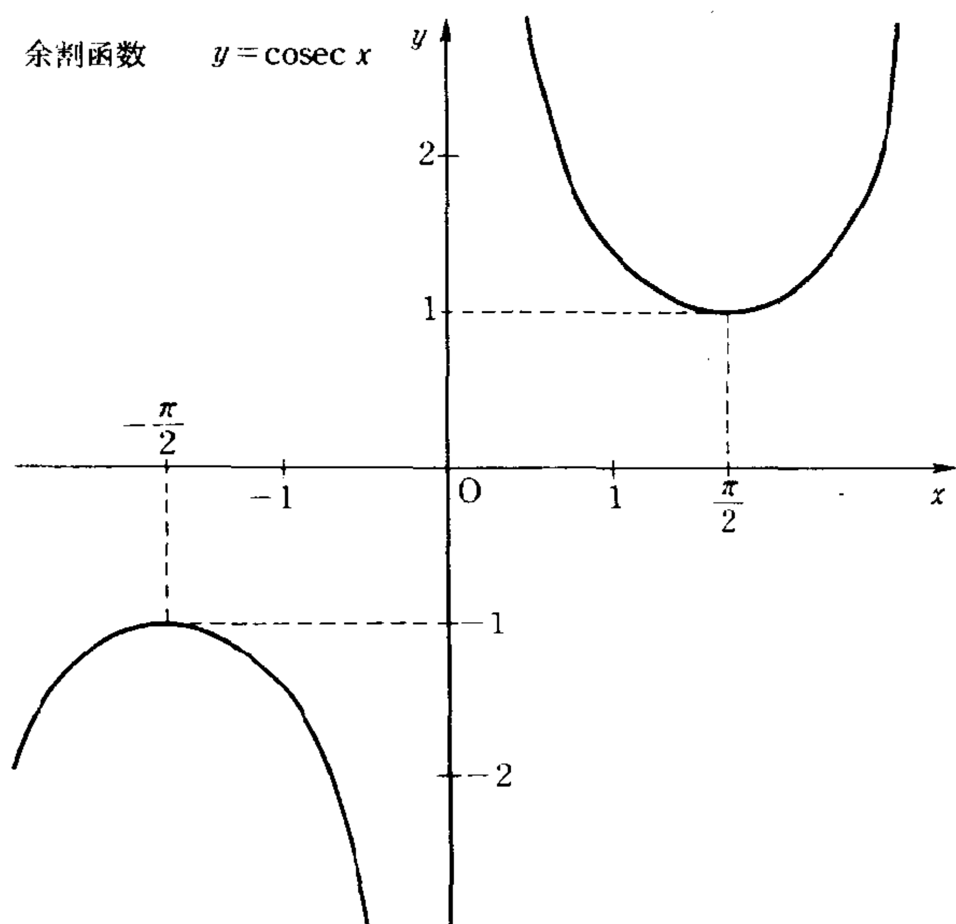

正割函数
$y=\sec x$
y
2
1
$\frac{3}{2}\pi$
π
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
x
−1
−2

图 4-13



反正割函数
y
$y=\operatorname{arcsec} x$ [0, π]
π
$\frac{\pi}{2}$
-2
-1
O
1
2
x

图 4-14



余割函数 $y=\operatorname{cosec} x$
y
2
1
$-\frac{\pi}{2}$
-1
O
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
-2

图 4-15

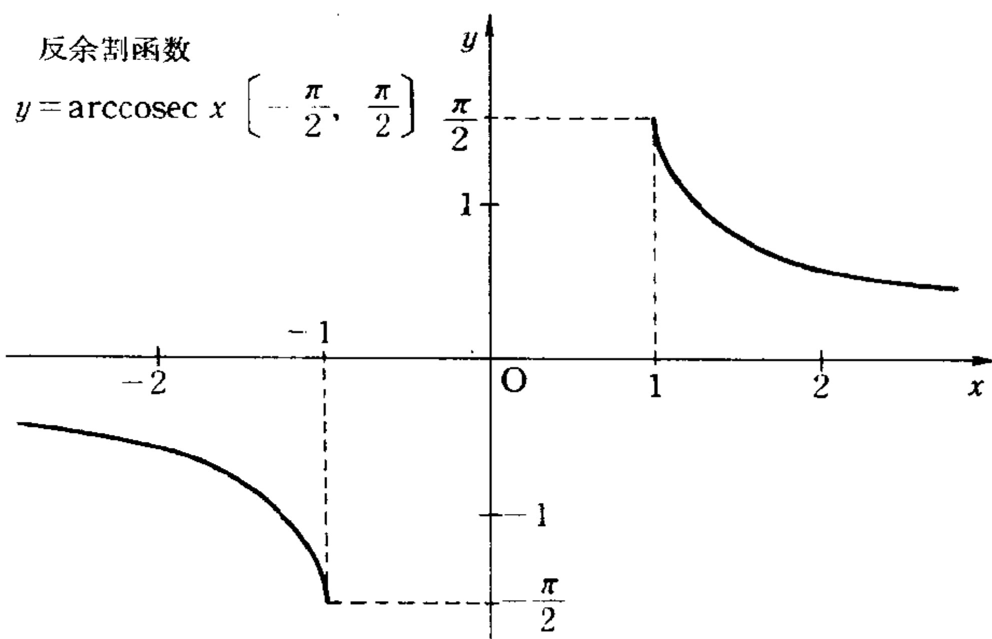


图 4-16

4.7 摆的振动与三角函数

尽管目前已很少见了，但在昭和初期，说到钟就一定是摆钟。这种钟利用了摆的等时性。

手表则是利用了发条的机械运动原理。

摆的等时性是由意大利人伽利略(Galileo，1564—1642)发现的。他在比萨大学学医时观察教堂里的灯的摆动，通过与自己的脉搏相比发现，摆往返一次需要的时间相同(等时性)。

1609 年，他发明了伽利略式望远镜，并用以观察天体，从而赞成地动说。1589 年，他就任比萨大学教授，1610 年，他荣获斐兰兹公国的克西姆二世之称号，并继续研究数学，1616 年宗教判决了地动说，并禁止教授和谈论地动说。1632 年伽利略因发表《天文学对话》再次受到宗教的判决，被关在斐兰兹郊外的城堡

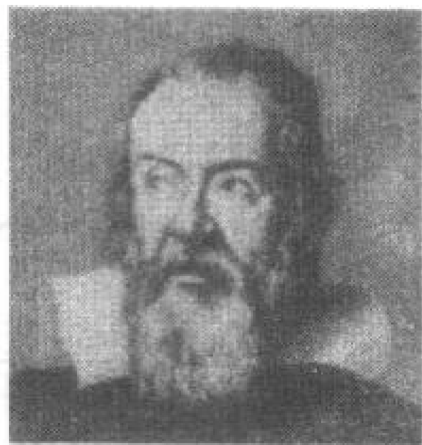


图 4-17　伽利略(1564—1642)

里，死后不许举行葬礼，也不许建立墓碑。

他在比萨斜塔上同时投下重物和轻物的实验，证实了当时被人们普遍接受的“重物比轻物降落得快”的观点是错误的，从此创立了自由落体与重量无关的落体定律。

以后，他又与卡路达奴一起成功地用数和量表示偶然发生的事件，并出版了《关于骰子赌博的考查》一书。

他说“掷三个骰子时，点数和为 9 的概率不同于点数和为 10 的概率”。这段说得清楚透彻的话在当时广为流传。

下面描叙振子所具有的“等时性”，当然不限于计时所使用的摆。

因为振子的运动是往返运动，所以用曲线表示时，可用正弦曲线或余弦曲线。

前面已经讲过了此类曲线的描绘方法，把振子这种最简单的往返运动称为“单振动”。

单振动是振子与振动中心的距离随时间按正弦曲线或余弦曲线的变化的往返运动。

在数学上可将它看作是沿着半径为振幅 r 的圆周，以一定的角速度 ω 运动的点在圆的直径上的投影。在力学上，单振动或像弹簧那样弹性振动的物体，总是受到与某定点的距离成正比的力的作用，使其处于被拉回到定点的状态，从而成为往返运动。

将偏离中心的最大值称为振动的“振幅”，它相当于前面所说的圆的半径。

另外，往返一次所需要的时间称为“周期”。

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期是 2π，也就是 360°。$y=\tan x$ 的周期是 π(180°)。一般用 t 或 T 表示周期，t 或 T 是时间的英文字(time)的词头。

周期 t 或 T 的倒数，即 $\frac{1}{t}$ 或 $\frac{1}{T}$ 称为“频率”。一般用希腊字母 ν 表示，$\nu=\frac{1}{t}$ 或 $\nu=\frac{1}{T}$。

换言之，每秒钟往返振动的次数是“频率”。此处，振幅 r、周期 t 或 T、频率 ν 是决定单振动形状的要素。

若将这些单振动看成是以角速度 ω 做圆周运动的点的投影时，有如下关系：

$$t=\frac{2\pi}{\omega},\upsilon=\frac{\omega}{2\pi}$$

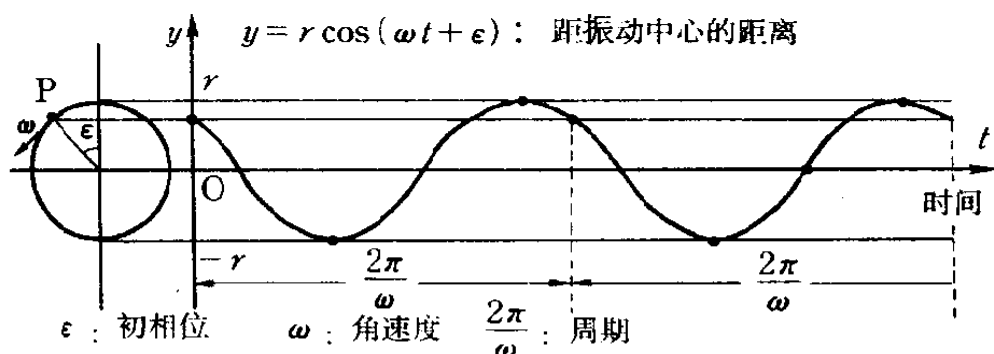


图 4-18

描述图 4-18 中的单振动是余弦函数。它是初始位相为 ε、角速度为 ω、周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$ 的圆运动的点 P 在 y 轴上的投影。在此图上，点 P 的投影以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期不断地重复。

4.8 虚数单位 i 与 π

代数学的诞生比几何学晚很多。

伊斯兰教产生后，仅经过了 10 年左右的时间就统一了阿拉伯地区（622—632），以后又用了约 100 年的时间建成了撒拉逊大帝国。这个国家的人是阿拉伯人。

除宗教和商业外，阿拉伯人还非常重视学问。他们把许多希腊和印度的科学书籍译成阿拉伯文。

773 年，印度学者甘卡夫来到阿巴斯王朝的 A. 曼斯鲁（754—775）宫廷，将含有 0 和定位原则的印度数字带到了阿拉伯。

9 世纪时，阿拉伯数学以印度和希腊数学为基础开始兴起，10—11 世纪飞速发展。

在这些阿拉伯人中，有位研究数学的人叫 M.Y.M. 阿鲁克瓦利兹（780 左右—850 左右）。他创立了阿拉伯王 A. 马木尔（813—833 在位）的图书馆。他汲取了印度和希腊数学的长处之后，写了多部数学著作。这些书与实际密切相关，例如，关于土地测量、商业计算、财产继承和分配等方面的必要的数学。可以说，因其名而出现了英文词汇“algorism”和“algorithm”。

所谓“algorism，algorithm”含义是“计算顺序”或“计算程序”。最近由于发明了计算机，这个词再次显露头角。

此外，他想出了在方程式两边同时增加正项可以消去负项的方法。将补加的正项叫做“阿鲁·吉布拉”。其含义是“移项”。由此演变具有重要含义的英文“algebra”一词，译为“代数学”。

把印度和阿拉伯数字传入欧洲的是法国的吉鲁拜尔。大约在10世纪。

此人生在奥贝鲁纽的一个贫苦之家。在修道院受教育后，到西班牙学习数学，了解了阿拉伯数字(在印度创造的数字)。

当时的西班牙是东西方文化的交汇处。中国、印度、阿拉伯的文化已传入此地。

因为学习到了由阿拉伯人传播的印度数字(也称印度和阿拉伯数字)，吉鲁拜尔幸运地得到了将其传至欧洲的机会。

公元前就已经知道了分数，但是小数则是在印度和阿拉伯数字传到欧洲后，才发现的。

在此，对小数稍加说明。

在现在这样用10进制表示小数的方法确立之前，流传着这样的事。

在荷兰，有一位叫斯泰芬(S. Stevin，1548—1620)的人，他曾在商店工作，去过普鲁士和波兰，以后担任军中会计。1585年，他出版了关于小数的书。

他把小数237.578写成237⓪5①7②8③，并阐述了小数的四则运算，即加法、减法、乘法和除法的方法。除了小数的符号外，他还规定了一种指数表示法，他把

x 写成①，把 x^2 写成②，把 x^3 写成③。

离题稍远一点，说一下将等号写成现在这种形式，即“=”，的人是英国的 L. 维克多(1510—1558)。在 1557 年他写的代数书中最先使用现在的等号。

现在读小数部分时是不带单位直读。在日本江户时代，要带有位数地读。

小数第 1 位称为“成”，小数第 2 位称为“分”，第 3 位称为“厘”，第 4 位称为“毛”。所以 0.1234 读为 1 成 2 分 3 厘 4 毛。

还有一种说法，将小数第 1 位称为“分”，第 2 位称为“厘”，第 3 位称为“毛”的。这种读法估计是从印度传来的。

因此，即使今天也有人分不清“成”与“分”。

大家可能都清楚，“实数”由有理数和无理数组成。0 与正、负整数，有限小数及分数统一称为“有理数”。π、e、$\sqrt{2}$…等统称为“无理数”。

在应用公式解二次方程式 $x^2+2x+3=0$ 中，$x=-1\pm\sqrt{1-3}=-1\pm\sqrt{-2}$，所以解为 $x=-1\pm\sqrt{-2}$。

但是以前规定 $a^2\geqslant 0$(a 为实数)，所以，$\sqrt{-2}$ 等不属于实数。

定义 $\sqrt{-1}=i$，则 $i^2=-1$。这样出现了“平方后为负的数”。这就是“i 的发现”。因此很清楚，在数中，除实数外，还应有“虚数”。

如上定义 i 后，则

$\sqrt{-2}=\sqrt{-1\times 2}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}i$，$\sqrt{-a}$ ($a>0$) 可写为 $\sqrt{a}i$。

包含实数和虚数的数称为"复数"。

将虚数称为"虚的数(imaginary number)",它们是在数轴上不能表示的数。

全部实数可表示在数轴上。因 4-19 是表示实数的数轴。

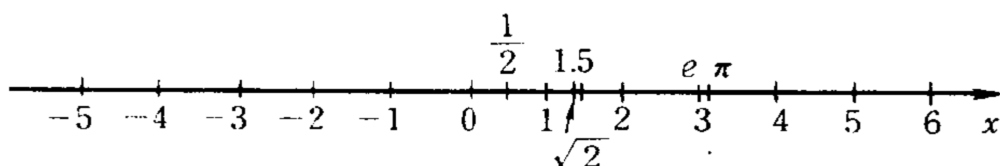


图 4-19

那么虚数如何表示呢? 虚数可用高斯平面(复平面)上的竖轴表示。

如图 4-20,图中竖轴称为"虚轴"或"虚数轴"。

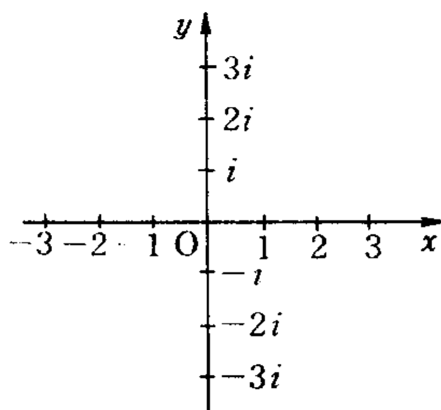


图 4-20

与此相应,把以前的数轴称为"实轴"或"实数轴"。

包含实轴和虚轴的平面称为"高斯平面"或"复平面",在这个平面上可以表示所有的复数(包括实数和虚数)。

如图 4-21 所示，点 z 的坐标为 (a,bi)，则有表示 $z=a+bi$，z 为“复数”。

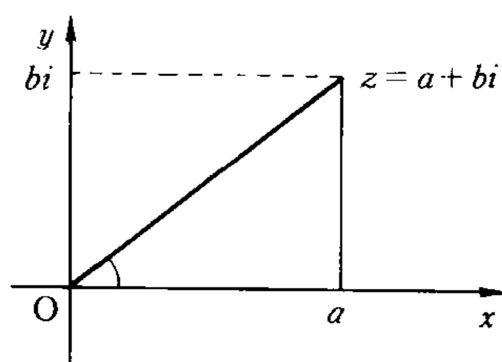


图 4-21

在 $z=a+bi$ 中，当 $b=0$，也就是说 $z=a$ 时，z 为“实数”。

当 $a=0$ 时，即 $z=bi$ 时，z 为“虚数”或“纯虚数”。

因此，复数是除了普通的复数 $2+3i$，$3-5i$… 等外，还包括如 a 和 bi 这样的实数和纯虚数。

下面，稍离主题，介绍一下高斯。

最早研究简单求解 $1+2+3+\cdots+40$ 等差数列之和的公式的人就是数学天才高斯(K. F. Gauss，1777—1855)。



图 4-22　高斯(1777—1855)

他于 1777 年 4 月 30 日出生在德国不伦苏哈克的一个砖瓦匠的家中。其父原打算让高斯继承父业。但高斯天性聪慧，其母让高斯在少年时代就开始做学问。

他 9 岁时，先生向班上的学生提问题，“从 1 加到 40”(前面讲的问题)。

小高斯立即回答“是 820”。先生大吃一惊！先生问他如何计算，他回答，“计算(1+40)×20”。先生再次大吃一惊！因为先生自己都不知道这种方法，而高斯却知道。

这就是现在的等差级数(数列)(arithmetical progression，缩写为 AP)的计算方法。初项为 a，相邻两项之差，即公差为 d 时，第 n 项则为 $a_n=a+(n-1)d$。从初项到第 n 项之和 S_n 可用下式表示

$$S_n=\{2a+(n-1)d\}\times n\div 2=(a+a_n)\times n\div 2$$

此计算公式是 200 年前由 9 岁儿童发现的。

高斯的研究涉及数学、天文学、电学和磁学等多个领域，他有很多发现或发明。其中有著名的测量天体轨道的方法。现在有许多物理量的单位以高斯的名字命名，磁感应强度的单位“高斯”是众所周知的。

他之所以能进行各种研究，是因为当时的君主(Prince Ferdinand of Braunshweich)为他提供资金。

高斯将数学严密化。他认为“所有的自然科学均以数学为基础。”

他的名言是“数学是科学的女皇”。

他曾开玩笑地说“我从婴儿时起就从事数学计算了”。

现在，参看图 4-23 我们设复数 $z=x+yi$，当 Oz

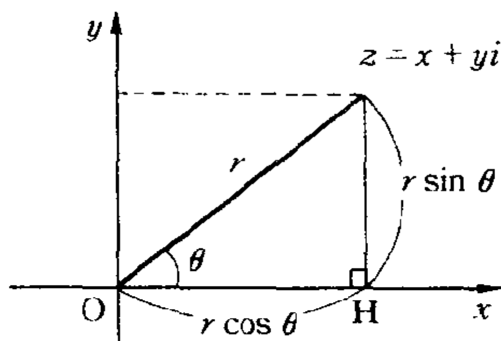


图 4-23

$=r$，$\angle zOH=\theta$ 时，利用三角函数则有，$\cos\theta=\frac{x}{r}$，sin

$=\frac{y}{r}$。

两边乘以 r，则变为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 代入 $z=$ $x+yi$，则有 $z=x+yi=r\cos\theta+r\sin\theta\cdot i$. 因此 $z=$ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$。

这种表示方法称为复数的"极坐标表示"。

下面再看与自然对数的底 e 有关的公式。

$e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=2.718281828459045\cdots\cdots$ 作如下展开式，

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{yi}=1+\frac{yi}{1!}-\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3i}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(yi)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}$$

$$=\cos y+i\sin y$$

再由，$e^z=e^{x+yi}=e^x\cdot e^{yi}$ 可知

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

设 $x=0, y=\theta$，故 $e^x=e^0=1, e^{yi}=e^{\theta i}$，

则 $e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$

此等式叫“欧拉公式(Eulerian equality)”

将 $\theta=\pi$ 代入欧拉公式，则有

$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1+0i=-1$

直接写为 $e^{\pi i}=-1$。

这就是 e、π、i 三者的关系式，因之也是三者的接触点。此式是二个无理数(超越数?)e 和 π 与虚数单位 i 的唯一一个关系式。

若用 $-\pi i$ 替代上式的 πi，因 $\sin(-\pi)=0$，$\cos(-\pi)=-1$。则 $e^{-\pi i}=-1$。将这二个公式归纳为一个，则有 $e^{\pm\pi i}=-1$。

4.9 π 是无理数

实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数} & \left(\text{可用}\dfrac{a}{b}\text{表示的数}\right)\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{代数无理数} & (\sqrt{2},\sqrt{3}\text{ 等})\\ \text{超越数} & (e,\pi\text{ 等})\end{cases}\end{cases}$$

由此看出，π 不是有理数，不能用分数形式表示。

作无理数 π 的近似值，可使用$\dfrac{22}{7}$和$\dfrac{355}{113}$。这二个分数只是很接近 π 值，但不等于 π 的真值。

但是 π 的真值是应该存在的，在数轴上也确有其位。它应该在 3 与 4 之间。如图 4-24，在自然对数的底 e 的稍右位置。

前边曾提到过，公元前阿基米德提出 π 值是

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

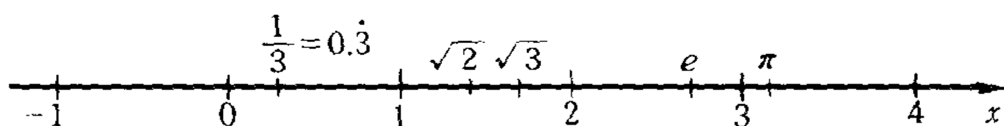


图 4-24

虽说 π 是无理数，但它不是代数方程的解，因此它是个超越数。

无理数不能表示成$\frac{a}{b}(b\neq0)$。希腊人知道这件事比几何学天才欧几里得还早。

为什么这样的事早在公元前 300 年前就清楚了呢，这是因为当时人们熟悉几何学和分数。因此，如何表示边长为 1 的正方形的对角线的长度$\sqrt{2}$，就成为研究的重点。

从图 4-25 可知，图中对角线的长度既不能用整数也不能用分数表示。

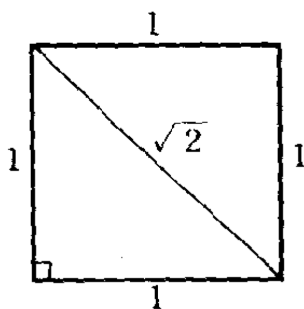


图 4-25

如前所述，即使进入了计算机时代，求 π 值也要使用马逊公式或欧拉公式。就 π 值计算而言，欧拉留下了相当完美的公式。与此同时，又有新问题出现。

这就是，不能成为代数方程解的数叫作“超越数”。

因为 π 不是有理数，因此一直被看作无理数。而无理数可成为代数方程的解，例如，$x^2=2$ 的解可用 $x=$

$\pm\sqrt{2}$表示。

但是π不能成为系数为有理数的代数方程的解。1882年，林德曼使用欧拉展开式证明了这个结论。

我想可能有人认为并非如此。比如说方程式$x^2=\pi$有解$x=\pm\sqrt{\pi}$。那么上边结论就不成立了吗？关于这个议题，留给专家们探讨。

4.10 证明π是超越数的人

真正证明π既不是有理数也不是代数无理数（当然不是虚数，是实数）而是“超越数”的人是距今100多年前的丹麦数学家康托尔（G. Cantor，1845—1918）。

一开始，世界上有好多著名数学家不赞成他的观点。最早肯定他论文的人是戴德金（J. W. R. Dedekind，1831—1916）。他说：“数不是神赐予的，而是人类自由创造的”。

而康托尔说“数学的本质在于自由”。康托尔是丹麦商人的儿子，生于列宁格勒。后移居德国，任哈雷大学教授。

比康托尔早30年左右就有人扩展尤尔米特的思想（e是超越数），证明π也是超越数。这个人是林德曼（F. Lindemann，1852—1938）。

现在没有一个人会怀疑e和π是超越数。曾被看成代数无理数的π，摇身一变成为一个新的数——超越数。

第五章

π的计算方法

5.1 公元前已利用正多边形计算π

由于π是圆周长与直径的比，因此，开始用圆内接或圆外切的正多边形计算π。

而用圆的半径切割圆周时，得到正6边形的各个顶点。这是几何学早期发现的事情。

因此，在远古时期一直认为圆周是直径的三倍左右。

在日本伐木或古书中，π大体上也用3代表。

在此，我们作图分析一下。

如图5-1所示，用半径切割圆周时，正好划分为6个部分，这么“正好”肯定是上天授意的。

正6角形中这个“正好”(just)的情况，完全是一次偶然的发现。

一周是360°，正三角形的一个内角是60°。对此，现代人不会感到怎么不可思议。可是以前肯定有人在圆规发明之后，用圆规多次反复论证过。

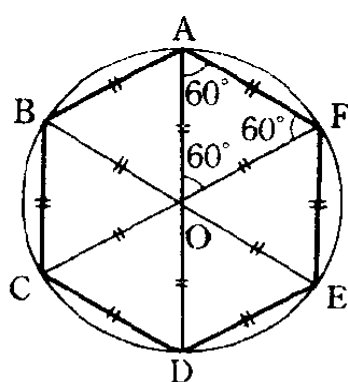


图 5-1

也许，那位发现了“正好”的人曾与大数学家商量过一番。

取正 6 边形的边长为 1/2，不错，圆周约为 3，但肯定要比 3 长一些（$\pi>3$）。

因为是这样，所以任何人都会想到应增加多边形的边数。比如，内接正 12 角形（正 12 边形）的情况又会是什么样子呢？

参照图 5-2 和 5-3，计算正 12 边形的周长。为了易于理解，边看图边加以说明。

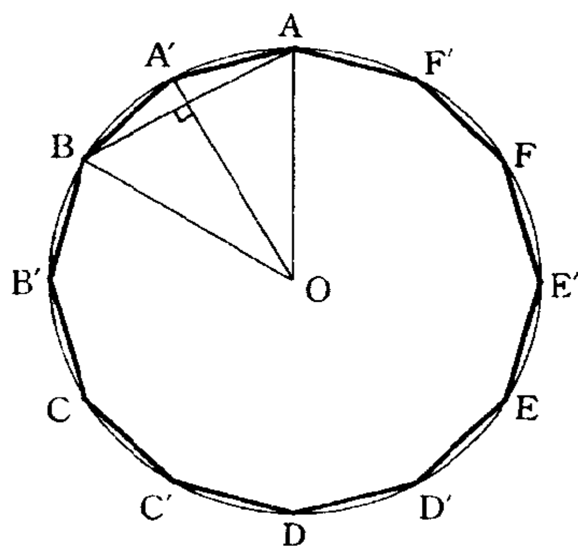


图 5-2

首先在图 5-4 中，取正 12 边形的一个边长为 x，半径与正 6 边形的一个边的交点为 P。

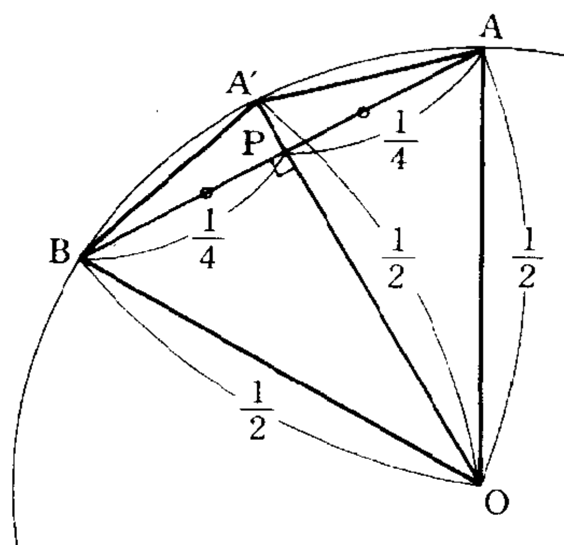


图 5-3

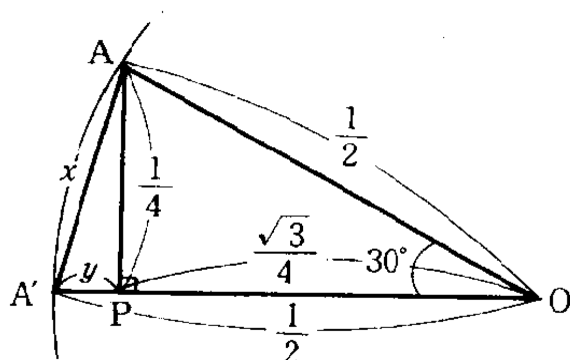


图 5-4

正 12 边形的一个边 $AA'=x$，令 $A'P=y$。先来求 y 的长度。

在 ΔAPO 中，$\angle AOP=30°$，

$$AP:AO:PO=1:2:\sqrt{3}$$

从而，$PO=AP\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

因此，$y=A'O-PO=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

在$\Delta AA'P$中应用著名的毕氏定理(三平方定理)，$\overline{A'A}^2=x^2=\overline{AP}^2+\overline{A'P}^2$，所以

$$x^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{16}$$

$$=\frac{1+4-4\sqrt{3}+3}{16}=\frac{8-4\sqrt{3}}{16}=\frac{4-2\sqrt{3}}{8}$$

所以 $x=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

故正12边形周长为

$$12x=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})\doteq 3(2.4495-1.4142)$$

$$=3\times 1.0353=3.1059\cdots$$

所以 $\pi\doteq 3.1059$。

使用正12边形，π的计算已正确到小数点后第一位。此后，自然是继续增加边数，正24、正48边形…。

在x的计算过程中，有$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$这一步。若不对此稍加说明，可能有的读者会感到困难。

下面离开主题，对上边等式稍加说明。

$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}$属于“二重根号式”。为将其简化，设$\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$(正、负号顺序相同)，两边同时平方，则有

$a+b\pm 2\sqrt{ab}=(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2=x+y\pm 2\sqrt{xy}$(±号上下分别对应)。

于是，下面就是要求出满足$x+y=a+b$，$xy=ab$的x和y了。这就不是什么难题了。

总之，必须知道二项式平方的展开式，即

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$(±符号上下分别对应)

其它只不过是它的具体应用而已。

数学基础牢固的话，其应用得心应手。

在世界范围内为检验各国数学实力每年举办一次“数学奥林匹克比赛”。每次比赛时，日本人的记忆力可称得上是世界第一，但在应用问题方面，就明显差多了。

即使记忆好，若不会灵活应用所记忆的知识，用处也不大，这是有宝不会开发，太可惜了，原因在于没有理解。

记忆和死记硬背不同。日本人多是死记，所以不奏效。

5.2 用连分数计算 π

用连分数计算 π 的人不多，要多次展开。

首创连分数的是一个叫盖托蒂的数学家。在 5.6 节中（5）所介绍的布朗开罗（1620—1684）的连分数源于下式

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}$$

在一定范围内计算上式，先采用繁分数形式。

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2}}}}}$$

再计算

$$2+\frac{81}{2}=\frac{4+81}{2}=\frac{85}{2},\ 2+\frac{49\times2}{85}=\frac{170+98}{85}=\frac{268}{85}$$

$$2+\frac{25\times85}{268}=\frac{536+2125}{268}=\frac{2661}{268}$$

$$2+\frac{9\times268}{2661}=\frac{5322+2412}{2661}=\frac{7734}{2661}$$

$$1+\frac{2661}{7734}=\frac{7734+2661}{7734}=\frac{10395}{7734}$$

再由

$$\frac{\pi}{4}=\frac{10395}{7734}$$

可得

$$\pi=\frac{4\times7734}{10395}=\frac{30936}{10395}=2.9760\cdots$$

因为在展开式中取的项数有限，所以π值没有超过3。

由上可见，计算量很大，是古人对计算感兴趣吗？对现在的年轻人来讲，这是枯燥无趣的，古人也许因娱乐或兴趣而高兴这么去干。

5.3 谁发现了弧度法？

哪本书都没有指出是谁发明了弧度法（弧度、rad）测量角度的。但是毫无疑问，在角度计量中使用π是最恰当的、最有效的方法。

如前所述，在圆周上取与半径长度相等的弧，以该弧所对的中心角的大小，作为角度单位。这可能是头脑聪明的人的偶然发现。

0的发现不仅是数学界的一件喜事，而且受到世人的肯定。而利用π表示角度的弧度法，加快了其后

π的求值，使延长π的位数的竞争更有意义。

但是，与0的发现有不同之处，π的位数延长到亿位，也只不过刷新记录而已。这种竞争与攀登高峰的竞赛相似，“那里已有个高峰”。

π的位数的增多对人类究竟有多大贡献？在没有人研究出如何利用这些位数的时候，它只不过是“吉尼斯”书上留下的一个记录而已。

有关弧度法就以此作个开场白。前面曾提过，采用弧度法，扇形面积S和弧度l可以简单表示出来。

当中心角为θ弧度时，$l=r\theta$，$S=\frac{r^2\theta}{2}$。上述公式非常方便实用。

5.4 利用展开式计算π

目前，用展开式计算π是延长π的位数的方法之一。

前面介绍过莱布尼兹、欧拉、马庭等的展开式，它们各有优缺点。

最早的莱布尼兹展开式形式很简单，但缺点是收敛太慢。

马庭和欧拉的公式实用性强，收敛性也比其它公式好。但即使如此，如作者前面所示出的那样，算到10项或20项处，也不能赶上公元前阿基米德的计算结果。

就是这样，有许多人把一生精力都花费在计算π值上了。结果呢？如前边提到的例子，π值算到707位，用计算机一验证，528位以后都是胡说八道。这么说有

些失礼了。

在 1873 年那样的旧时代，将毕生献于 π 的人，其韧性和毅力实在值得人们敬佩。若计算机没有发明的话，他们在历史上也会留下光辉的名字。

另外，如前所述，使用 $\arcsin\frac{1}{2}$ 的牛顿法，因收敛得比较快，故被认为较有实用价值。

在实际应用中，π 的近似值取 3.1416 或者 $\frac{355}{113}$ 已足够用了。

除了在人造卫星和天文学方面有用处外，在其它方面，π 的位数的竞争几乎完全没有什么意义。

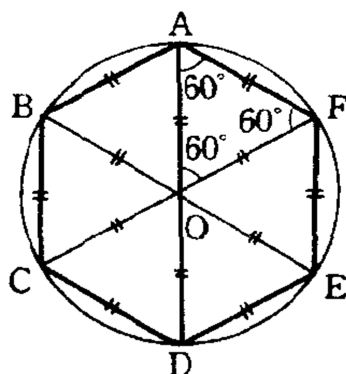


图 5-5　各种 π 的计算法

5.5　其它著名数学家的计算公式

前边已列出过几位著名数学家提出的 π 值计算公式。下面，综合各种书籍中的有关公式。如有什么参考价值的话，将是幸运的。

维加（Vega，1754—1802）在 1789 年发表的公式

是

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-2\arctan\frac{1}{408}+\arctan\frac{1}{1393}$$

欧拉-维加（Euler-Vega）公式是

$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}$$

克拉森发表的公式是

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}$$

卢瑟福（Rutherford，1798—1871）发表的公式是

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}$$

著名的高斯（K. F. Gauss，1777—1855）的公式是

$$\frac{\pi}{4}=3\arctan\frac{1}{4}+\arctan\frac{1}{20}+\arctan\frac{1}{1985}$$

达泽（Z. Dase，1804—1861）的公式是

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

过去曾接连不断地发表过许多类似的公式，绝大多数是反正切函数的表达式。也有人像牛顿那样，使用 $\arcsin x$。

5.6 π 的公式和展开式汇总

前边已介绍了很多 π 的公式和展开式，把它们集中在一起加以比较也很有意义。以下是整理后的结果。

（1）莱布尼兹（收敛慢）（1673）

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\right)$$

（2）欧拉（已用计算机）（1707—1783）

$$\pi=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\cdots\right)$$

（3）赫顿（1737—1823）

$$\pi=12\arctan\frac{1}{4}+4\arctan\frac{5}{99}$$

（4）马庭（已用计算机）（1706）

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}$$
$$=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\right)$$
$$-4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\cdots\right)$$

（5）布朗开罗（1620—1684）

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}$$

（6）牛顿（收敛快）（1642—1727）

$$\pi=6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 2^7}+\cdots\right)$$

（7）维加（1789）

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-8\arctan\frac{1}{408}+4\arctan\frac{1}{1393}$$

（8）欧拉-维加

$$\pi=20\arctan\frac{1}{7}+8\arctan\frac{3}{79}$$

（9）克拉森（1847）

$$\pi=8\arctan\frac{1}{3}+4\arctan\frac{1}{7}$$

(10) 高斯 (1777—1855)

$$\pi=12\arctan\frac{1}{4}+4\arctan\frac{1}{20}+4\arctan\frac{1}{1985}$$

(11) 达泽 (1804—1861)

$$\pi=4\arctan\frac{1}{2}+4\arctan\frac{1}{5}+4\arctan\frac{1}{8}$$

(12) 卢瑟福 (1841)

$$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{70}+4\arctan\frac{1}{99}$$

(13) 山克斯 (1853)

$$\pi=24\arctan\frac{1}{8}+8\arctan\frac{1}{57}+4\arctan\frac{1}{239}$$

除了上述的公式和展开式外，以下的公式也曾在书中出现过

(14) 夏普 (1705)

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right)$$

(15) 斯特姆

$$\pi=24\arctan\frac{1}{8}+8\arctan\frac{1}{57}+4\arctan\frac{1}{239}$$

(16) 高斯 (1777—1855)

$$\pi=48\arctan\frac{1}{18}+32\arctan\frac{1}{57}-20\arctan\frac{1}{239}$$

(17) 乌依塔

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

(18) 牛顿 (1642—1727)

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+24\left(\frac{1}{3\cdot 2^2}-\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{2\cdot 7\cdot 2^8}\right.$$

$$-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 9\cdot 2^{11}}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 11\cdot 2^{13}}-\cdots\Big)$$

（19）欧拉（1707—1783）

$$\pi=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots}$$

江户时代的日本数学家也提出过π的展开式，但当时的日本还没有推出算用数字，所以写起来相当困难。关于其中一个展开式的作者，说法不一。有的说是建部贤弘，有的说是松永良弼，不知该相信谁好。

下面的公式出自平山博士的《圆周率历史》一书。当然这个公式已采用了现代数学的表现手法。

（20）松永良弼（1692—1748）

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot 6}+\frac{1^2\cdot 3^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}+\cdots\right)$$

此外在欧洲还发现有下面的展开式。

（21）欧力斯（1656）

$$\pi=2\times\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

（22）肖鲁兹（1844）

$$\pi=4\arctan\frac{1}{2}+4\arctan\frac{1}{5}+4\arctan\frac{1}{8}$$

（23）维加（1789）

$$\pi=20\arctan\frac{1}{7}+8\arctan\frac{3}{79}$$

$$=8\arctan\frac{1}{3}+4\arctan\frac{1}{7}$$

$$=8\arctan\frac{1}{2}-4\arctan\frac{1}{7}$$

（24）布塞卡

$$\pi=32\arctan\frac{1}{10}-16\arctan\frac{1}{515}-4\arctan\frac{1}{239}$$

（25）艾斯克托（1896）

$$\pi=88\arctan\frac{1}{28}+8\arctan\frac{1}{443}$$

$$-20\arctan\frac{1}{1393}-40\arctan\frac{1}{11018}$$

除此之外，还有许多发现者不明的 π 的展开式。

第六章

研究π的展开式

6.1 重温正切函数和反正切函数

正切函数是 $y=\tan x$。

前边也已叙述过正切函数，它和反正切函数之间有什么关系呢？

下面只在主值范围内研究二者的关系。

图 6-1 是 $y=\tan x$ 的曲线图。图 6-2 是 $y=\tan^{-1}x$ ($y=\arctan x$) 的曲线图。这两条曲线关于直线 $y=x$ 对称。

从图 6.1 可知，$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\frac{\pi}{4}=1$，$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$。

因此，$\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$ $\left(\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}\right)$，$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ $\left(\arctan 1=\frac{\pi}{4}\right)$，$\tan^{-1}\sqrt{3}$

$$=\frac{\pi}{3}\ \left(\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\right)。$$

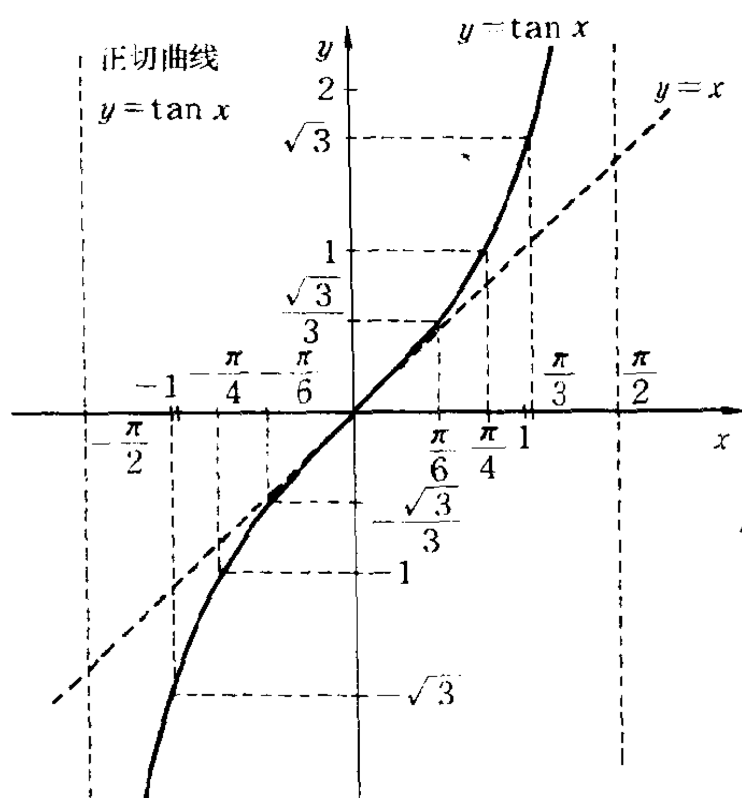

正切曲线
y = tan x
y = tan x
y = x
y
2
√3
1
√3/3
−1
−π/4
−π/6
π/3
π/2
−π/2
π/6
π/4
1
x
−√3/3
−1
−√3

图 6-1

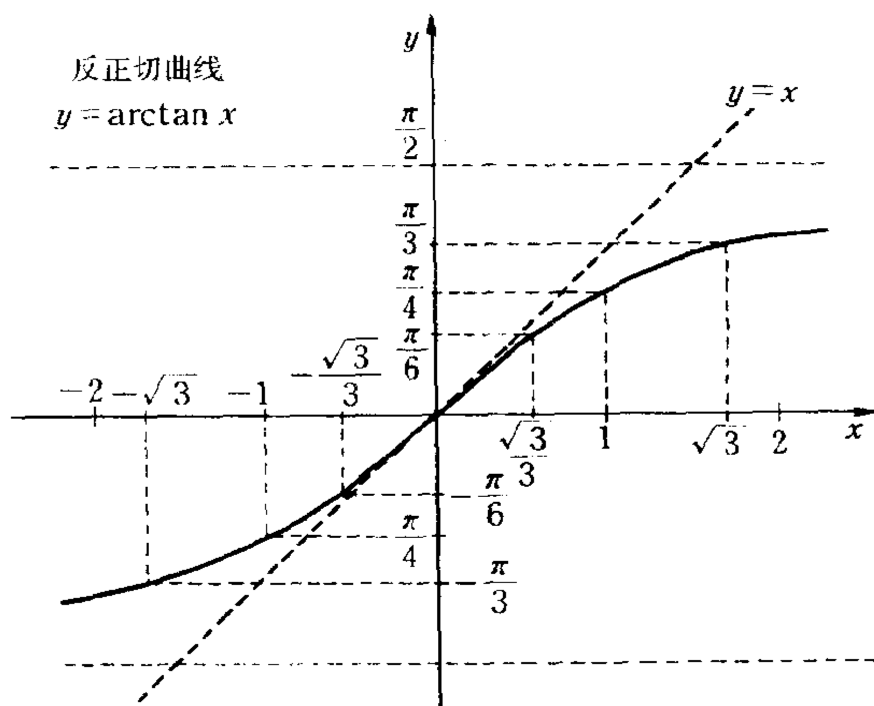

反正切曲线
y = arctan x
y
y = x
π/2
π/3
π/4
π/6
−√3/3
−2
−√3
−1
√3/3
1
√3
2
x
−π/6
−π/4
−π/3

图 6-2

在求π值的展开式中，虽有$\arcsin x$和$\arccos x$，但$\arctan x$明显偏多。

在他们的基础上，π的近似值的计算由起始的计算正多角形周长，发展到利用展开式。借助于计算机，使用展开式的方法，使π值的位数猛增到令人吃惊的地步。

其中，用弧度表示角度的方法比用度数表示角度更有效。能想出这种方法的人，实在很了不起。

6.2 π的反正切函数的展开式的收敛性

前边已列出过使用反正切函数$y=\arctan x$的π的展开式。例如，莱布尼兹公式，或叫作格里高利公式就是利用$\frac{\pi}{4}=\arctan 1$的展开式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

但该展开式收敛的过慢，无实用性。

实际上已经有人对它的前300项进行了计算，但算出的π只有小数前2位是正确的。这与2000年前阿基米德用$\frac{22}{7}$计算的结果处于同一水平。

从$\frac{\pi}{4}=\arctan 1$所得的欧拉公式为

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots$$
$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\cdots$$

重新改写后为

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots$$

利用$\frac{\pi}{4}=4\text{arc tan }\frac{1}{5}-\text{arc tan }\frac{5}{239}$的展开式为

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots\right\}$$

此式可改写为

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\frac{1}{7\cdot 239^7}+\cdots\right\}$$

其中，马庭利用了等式 $2\text{arc tan }\frac{1}{5}=\text{arc tan }\frac{5}{12}$，并亲自在 18 世纪将 π 值正确计算到 100 位。

以后英国人山克斯于 19 世纪后叶利用马庭公式将 π 算到 707 位。在好长时间这个结果都很有名。

如前所述，这个结果在战后用计算机验算后，发现 527 位前是正确的。

山克斯没有使用计算机算到 707 位，而且有 500 位以上是正确的。这也很不易，想必付出了很多的努力。用笔计算位数最多的人当属山克斯。

关于 707 位的佳话是作者在学生时代从恩师矢野健太郎博士那儿听来的。那真是惊人之举。

使用反正切函数的 π 的展开式有无限多个，其中实用性较强的是欧拉公式和马庭公式。

6.3 分数 分式及繁分式

为了计算 π，除了古时计算圆内接或外切正多边

形周长（将其多边形的边数做的非常多）的方法，以及微积分出现后的展开式方法外，还有连分数的方法。

为了说明连分数，首先必须从分数说起。

分数在公元前就有了，但写成现在这种形式并不那么遥远。

将 2 个整数 a、b 写成 $\frac{a}{b}$（$b \neq 0$）的形式。这种形式的数叫分数，对此谁都清楚。

分数可改成小数。分数改成小数时可分为 2 类：有限小数和无限小数。$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$ 等成为有限小数；而 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{7}$ 等，除到哪一位都除不尽，是无限小数。

由分数转化来的无限小数一定是循环小数。当将 $\frac{1}{n}$ 写成小数时，不管 n 多大，都是有限值，在 n 次除法中，将出现余数相同的情况。因此 $\frac{1}{n}$ 成为循环小数。

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，e，π 等数不能明确地表示成 $\frac{a}{b}$ 的形式，它们的近似值可以是有理数。π 的近似值可以是 $\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$，但这些值不是 π 的真值。

$\sqrt{2}$ 不是分数，写成小数也只能是无限小数，这些数称为“无理数”。可以这么理解，无理数是“没法写成分数形式的数”。

开场白太长了，下面介绍繁分数。

顺便说一下，“繁”字有“多”和“麻烦”之意。

$\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+2}}$，$\dfrac{\dfrac{1}{1+2}}{\dfrac{1}{2+3}}$等这样的分数是繁分数，将$\dfrac{2}{x+1}$那样的式子叫"分式"。而将$\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$形式的式子叫作"繁分式"。

当然，其中只含有数字的叫"繁分数"。含有字母时叫"繁分数式"。

在繁分数中，分子分母同乘以一个数，可以变成普通的分数，有时也能变成整数。

繁分式也可改写成普通的分式。如

$$\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{x}{x^2+1}$$

接下去说明"连分数"。

分母含有分数，该分数的分母又含有分数…这种接连不断用分数连接起来的分数叫作"连分数"。

例如 $e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cdots}}}$就是连分数。

第一次接触连分数的读者，可能觉得它很难理解。其实将分数改写成连分数是件非常简单的事。看下面的实例，就一目了然。

例如，将$\dfrac{73}{43}$改写成连分数。

由于$\dfrac{73}{43}=1+\dfrac{30}{43}$，$\dfrac{30}{43}=\dfrac{1}{\dfrac{43}{30}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{13}{30}}$，$\dfrac{13}{30}=\dfrac{1}{\dfrac{30}{13}}=$

$\frac{1}{2+\frac{4}{13}}$，$\frac{4}{13}=\frac{1}{\frac{4}{13}}=\frac{1}{3+\frac{1}{4}}$，所以 $\frac{73}{43}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}$

连分数有很多表示方法，采用一般形式，

$$\frac{73}{43}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

6.4 π和连分数

明白了连分数，下面介绍用连分数表示的π的展开式。

$$\pi=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{292}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots$$

写成繁分数的形式

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}}}}$$

下面像玩儿似的，有数值的地方，一步步改成分数加以计算，看看结果如何。

起始点是 $\pi=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$。

下一步则成为 $\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}=3+\frac{15}{106}$ $=3.14150\cdots\cdots$

再下一步 $\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3.14159292\cdots$

接下去 $\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}=3.141592653\cdots$

就这样 π 的近似值逐步靠近真值。

此连分数是瑞士的数学家兰伯特（J. H. Lambert，1728—1777）发表的。

顺便再写一个 π 的连分数，英国学士院首任院长布伦凯陆（1620—1684）回答沃利斯（J. Wallis，1616—1703）的质疑中出现过这个连分数，如下式。

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots\cdots}}}}}$$

沃利斯是最早用解析法研究 π 的英国人，他被称为“代数之父”。据说，他在 15 岁时，对其兄手里数学书中的那些符号很感兴趣，就一口气把那本书读完了。

他毕业于剑桥大学，是牛津大学的教授。那时，笛卡儿（R. Descartes，1596—1650）出版了一本解析几何的书，深奥难懂。为此沃利斯出版了《无限的算

术》，对笛卡儿那本书作了简单系统的阐述。

在沃利斯的这本书中首次出现π的连续乘积的公式。该公式非常有趣，写在下面。

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots$$

此式是从二项式定理推导出来的，若利用现代的积分公式，它不就和

定积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$

完全相同了吗。

因为这里出现了定积分的符号，那么就稍微对定积分加以说明。

大部分读者想必对此已很清楚，但因为还有人不清楚，在此简单介绍一下。

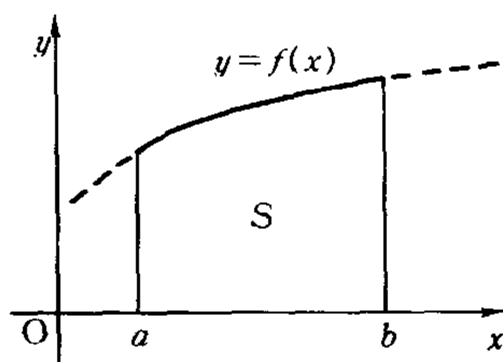


图 6-3

$F'(x)=f(x)$时，

$F(x)=\int f(x)dx+C$（C 为常数）

如图 6-3 所示，

$$\begin{aligned}S&=\int_a^b f(x)dx\\&=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

这样的积分称为"定积分",在前面所讲的不定积分中,将积分常数 C 置换成 $-F(a)$, $F(x)$ 置换成 $F(b)$ 就成了这个定积分。

将此称为函数 $f(x)$ 的"从 a 到 b 的定积分"。此从 a 到 b 的定积分的值是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴及直线 $x=a$, $x=b$ 所围面积。

这时也仍称作"对 $f(x)$ 从 a 到 b 积分(准确地说是定积分)。"将 a 称为"下端"或"下限", b 为"上端"或"上限"。不用说,这是由积分号 $\int$ 的上面写 b,下面写 a 而引出的术语。

6.5 半径 1 的 $\frac{1}{4}$ 圆面积 $\frac{\pi}{4}$

用 $S=\pi r^2$ 求解半径为 r 的圆面积 S。这个公式大家很熟悉。

若半径取为 1 时

$$S=\pi\times 1^2=\pi$$

因此,半径为 1 的半圆面积为 $\frac{\pi}{2}$,四分之一圆面积为 $\frac{\pi}{4}$。

在此使用定积分。设半径 1 的 $\frac{1}{4}$ 圆面积为 S,则

$$S=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

这是因为圆的方程为 $x^2+y^2=1$,所以

$$y=\sqrt{1-x^2}。$$

使用置换积分法,设 $x=\sin t$ 时,

$$dx=\cos t\ dt$$

当 $x=0$ 时，$t_1=0$，当 $x=1$ 时，$t_2=\frac{\pi}{2}$。所以

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

若去掉过程，只写出结果，则有

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

此式左边是求半径为 1 的$\frac{1}{4}$圆面积的定积分，右边是此圆$\frac{1}{4}$面积值。二者直接用等号相连，下式也成立：

$$\pi=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

在没有发现这样的积分式时，沃利斯用二项式定理成功地发现了下列的公式：

$$\pi=2\times\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}$$

那时，牛顿和莱布尼兹还没有发现积分计算法。

应该特别指出，沃利斯用无限乘积表示 π，与阿基米德等人通过正多边形计算 π 的方法完全不同。它是一种新观念的尝试。

6.6 用反正切函数计算 π

反正切函数可表示为

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n-1}\qquad(|x|\leqslant 1)$$

将此式展开

$$\arctan x=(-1)^0\frac{x^1}{1}+(-1)^1\frac{x^3}{3}+(-1)^2\frac{x^5}{2}+$$

…

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots$$

在上式中设 $x=1$，则有

$$\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

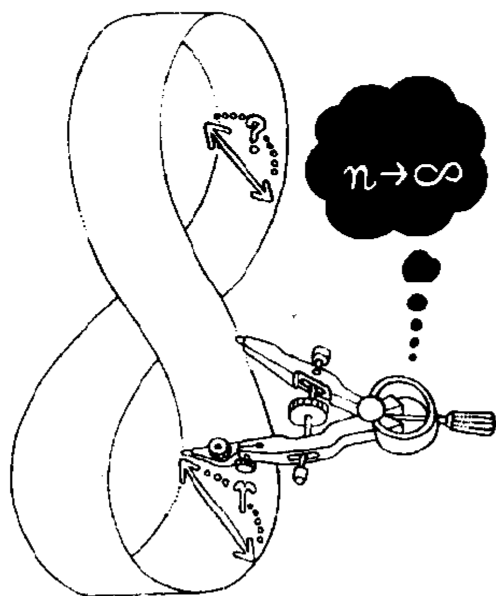


图 6-4　收敛慢计算难度大

因 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，则 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

故 $\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$

利用求和符号$\sum$，则有

$$\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$$

此式称为“莱布尼兹级数”或“格里高利级数”。但，如前所述，其收敛性欠佳，在实际计算或用计算机计算时，很少使用这个级数。

据说，有位叫多拉哥尼的人使用过此公式计算π。他说“要得到100位正确的值，要计算10^{50}以上的项。”

6.7 欧拉展开

莱布尼兹-格里高利公式简单，前面提到的马庭公式也简单，并可用于计算机。

但不管怎么说，欧拉公式（参阅§5.6）最好，现在用的也多。



图6-5 欧拉（1707—1783）

使用欧拉公式计算 π 的近似值很有趣。让我们也来试一下。

由 $\tan\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow \arctan 1=\frac{\pi}{4}$

由此有

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots$$

这就是欧拉公式。

将此公式写的再长一点

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}-\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\frac{1}{7.3^7}+\frac{1}{9.3^9}-\frac{1}{11.3^{11}}+\cdots$$

若计算这么多项，π 的值可近似到什么程度呢？

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{160}-\frac{1}{896}+\frac{1}{4608}-\frac{1}{22528}+\cdots$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}-\frac{1}{15309}+\frac{1}{177147}$$

$$-\frac{1}{1948617}+\cdots$$

$$=0.5-0.0416+0.00625-0.001116071\cdots$$

$$-0.0000443892\cdots+0.3-0.012345679\cdots$$

$$+0.00082304\cdots-0.0000653210\cdots$$

$$+0.000005645\cdots$$

$$=0.840412018\cdots-0.0552381268\cdots$$

$$=0.7851638912\cdots$$

$$\therefore \pi=4\times 0.7851638912\cdots$$

$$=3.1406539648\cdots$$

当然，各行的第一项之和是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

正项之和随项数增多而变大。前7项之和是

$$0.5+0.\dot{3}+0.25+0.2+0.1\dot{6}+0.1\dot{4}285\dot{7}$$
$$=1.592856\cdots$$
$$\pi=4\times1.592856\cdots=6.371424\cdots$$

从而，π 的值

$$3.1406539648\cdots<\pi<6.371424\cdots$$

由此看出，即使取小数点后6位或9位，π 的近似值也在阿基米德计算范围内，与 π 的真值差得远呢。

就因这样，有的古人毕生计算 π，付出了极大的努力。

有个传说，过去有人不知用了哪个公式，在1个小时内将 π 的值计算到20位。果有其事吗？谁也说不清楚。

6.8 用牛顿公式计算 π

上节我们使用欧拉公式计算了 π 的近似值，得出的结果比公元前阿基米德的还差。

古人韧性强，计算时肯定取不少的项。

下面我们利用牛顿公式，看看会出现什么样结果。

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots$$

这就是牛顿公式。

将 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $\arcsin x$ 的展开式，就得到牛顿公式。

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{40}\times\frac{1}{32}+\frac{15}{1680}\times\frac{1}{128}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{48}+\frac{3}{1280}+\frac{15}{215040}+\cdots$$

$$=0.5+0.02083\cdots+0.000069754\cdots+\cdots$$

$$=0.520903087\cdots$$

$$\therefore \pi=6\times 0.520903087\cdots$$

$$=3.125418522\cdots$$

据说，牛顿算到14位。使用牛顿公式，计算简单，收敛得也很快。

但现代利用计算机计算 π 时，多用欧拉公式和马庭公式，这其中程序设计的好坏很有关系，因此必须在设计上多下功夫。

第七章

延长π的位数的竞争

7.1 π的位数与近似程度

π的值就这样在弧度法方向上发展下去，可能在某个没有料到的地方得到应用。

最近人们似乎认为弧度法的利用价值比π的近似值更有分量。

π有许多近似值，但不论怎么说，有代表性的是以下四种：

小数 3.14、3.1416 和分数$\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$。

大约在 1930 年，日本的小学生就熟悉这几个值。

下面分析这 4 个π的近似值及其近似程度。

因分数容易换成小数，所以先将分数化成小数。

用 7 除 22，$\frac{22}{7}$变成循环小数。

$$\frac{22}{7}=3.14285714\cdots=3.\dot{1}4285\dot{7}$$

根据作者的计算，若除法做得没错的话，$\frac{355}{113}$将成

为下面的循环小数：

$$\frac{355}{113}=3.\dot{1}41592920353982300884955752212389380530$$
$$973451327433628318584070796460176991150442477876106194690265486725663716\dot{8}$$

因此有下边的不等式

$$3.14<\pi<\frac{355}{113}<3.1416<\frac{22}{7}$$

此处，3.14 正确到小数点后 2 位；3.1416 正确到小数点后 3 位。

而$\frac{22}{7}$正确到小数点后 2 位。

在这几个 π 的近似值中，$\frac{355}{113}$正确到小数点后 6 位。因此，也就容易理解为什么欧洲多用此分数。

当使用 3.14 和 3.1416 时，作为近似值，后者的正确位数只不过比前者多一位。

从误差理论的角度来考虑，3.14 是比 π 小的近似值，$\Delta\pi=0.0015926535$，3.1416 是比 π 大的近似值，$\Delta\pi=0.0000073464$。

此处 $\Delta\pi$ 是 π 的绝对误差。

也就是说，3.14 的误差大约是 1.6‰（千分之 1.6），3.1416 的误差在十万分之一以下，因此用 3.1416 比用 3.14 好。

而在 $\pi\approx\frac{355}{113}$时，这是个比 π 大的近似值，$\Delta\pi\approx 0.0000026676\cdots$，其误差在百万分之一以下。

$\frac{22}{7}$比 π 大，$\Delta\pi=0.00126449\cdots$，误差大约是 1%，

这好像是说$\frac{22}{7}$的坏话，即使往好里估计，误差也有$\frac{2}{1000}=\frac{1}{500}$。

今后推广使用$\frac{355}{113}$，它是π的最好的近似值。

找到此近似值的欧洲人，也令人佩服。

7.2 发现$\frac{355}{113}$的人

在欧洲，$\frac{355}{113}$是使用较多的π的近似值。如前所述，它接近π的真值，误差小，是π的最好的近似值。

如前边所计算的那样，$\frac{355}{113}$化为循环小数时，实际上循环节达到112位。

在无限小数中，有有理数和无理数之分。有理数是可以表示成$\frac{a}{b}$(a、b都是整数，$b\neq0$)形式的数。无理数不能表示成分数的形式。

无理数中，有像$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$那样，在开平方时，无限继续，而且所得的平方根是无规的(没有顺序)数。也有自然对数的底($e=2.7182818284590452353\cdots$)和圆周率($\pi=3.14159265358979323846\cdots$)。

最近将π称为超越数(参看第4章)。它既不是有理数，又不是代数无理数。

开场白有些啰嗦了，言归正传。发现$\frac{355}{113}$作为π的近似值的人是中国古代大数学家祖冲之。

那是在公元6世纪，它比欧洲发现的时间早10个

世纪。

按作者的想像，估计不会是古印度的数学家发明后再传入中国。

16 世纪欧洲发现π的近似值$\frac{355}{113}$，这点是可信的。

那时，欧洲与东方，特别是与中国通过丝绸之路以及海路来往密切。

还有一种说法 A. 梅蒂乌斯(1527—1607)认为用分数表示圆周率应在$\frac{333}{106}$与$\frac{377}{120}$之间。将这两个分数的分子与分子相加，分母与分母相加，就得到$\frac{355}{113}$。

分母之和是 106＋120＝226，分子之和是 333＋377＝710，所以$\pi\approx\frac{710}{226}$此分数的分子与分母都是偶数，用 2 约分，则成为$\frac{355}{113}$。

此事使人觉得有点太微妙了，真是这样的吗？

如前所述，我们坚信，$\frac{355}{113}$是π的最好的近似值。

7.3 $\frac{22}{7}$是公元前的π，π应取多少位？

即使在今天，伐木工人也是测量长在地上的树木的周长，除以 3 后，预测树的直径。

这与公元前圆周率取为 3、$3\frac{1}{7}$、$3\frac{1}{8}$等相近似。按照误差理论，在四则运算中，若只是单方面增大某一运算因子的位数，结果不受影响。因此，圆周率的近似值无论多么正确，意义不大。

以前用计算尺设计的机械运转很好，即使今天也

仍在运转。

在计算尺中，开头数字为 1 时，读取 4 位数字。开头数字为 2—9 时，可读取 3 位数字。

计算尺是一种应用以 10 为底的常用对数的计算工具。在轻便式小型计算机（台式电子计算机）出现以前，设计者完全依赖计算尺。

但是，当人类进入人造卫星和宇宙飞船的时代，π 的近似值没有达到一定位数的话，后果将不堪设想。

在计算机发明以前，人们是依靠作为计算尺基本原理的对数进行天文学方面的计算的。这些计算使用 7 位对数表。

但对一些普通计算，把 π 取为 3.14 或 3.1416 也就足够用了。

即使在使用计算机的现代，π 的位数还在逐渐增多，其中不乏惊人之处。

7.4 计算机使 π 的位数延伸

从公元前直到 19 世纪，π 的位数没有太大的变化。由于计算机的迅速发展，π 的位数得到延伸。

我们来看看延伸了多少。

开始使用计算机计算 π 是 1949 年，π 的位数达 2037。当时用的计算机是很有名的真空管式 ENIAC 机。使用这种计算机始祖算一次 π 要 70 多小时。

当时应用按马庭公式

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$

设计的程序。

接着,1958 年,π 被计算到 1 万位,1959 年计算到 16167 位。1961 年计算到 10 万位,以后仍不断更新记录,1966 年达 25 万位,1967 年增加到 50 万位。

1988 年 3 月日本使用巨型计算机获得了以亿计位数的 π 的近似值。它是由东京大学金田康正先生作出来的。此结果列在表 7-1 的最下行。

表 7-1　用计算机算出的 π 的近似值

(Δ 符号代表正确位数)

计算机型号	国　家	发表年代	位　　数
ENIAC	美国	1949	Δ　2,037
NORC	美国	1955	3,089
PEGASUS	英国	1957	Δ　7,480
IBM-704	法国	1958	10,000
”	”	1959	16,167
IBM-7090	英国	”	20,000
”	美国	1961	100,265
IBM-7030	法国	1966	250,000
CDC-6600	法国	1967	500,000
HITAC-8800	日本	1974	105,000
CLAY-2	美国	1986	29,360,000
SX-2	日本	1987	133,550,000
HITACS-820/80	日本	1988	201,326,000

另外,有报道说,1989 年 6 月,美国哥伦比亚大学一个小组计算 π 的近似值达 4 亿 8 千万位以上,详情参阅 § 7.7,总之记录还在不断刷新。

7.5 追溯到公元前

为什么 π 的位数的竞争会持续不断呢?

公元前的 π 是 3 和分数 $3\frac{1}{7}$、$3\frac{1}{8}$。

这是因为分数在远古时期就已诞生了。

如前所述,阿基米德认为 π 值应在如下范围

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

古书中也有人写过 $\pi=3$。这和前边说的伐木工人用 3 去除树围求树干直径是一样的。

在那时,谁也没有竞争的意识。

但是,当小数发现之后,在 π 的位数方面的竞争也就开始了。这样分析,不是很恰当吗?

7.6 小数的发现和斯蒂文

关于小数的发现者,并不怎么清楚。一般认为是荷兰的 S. 斯蒂文(1548—1620)。

此人在商店工作,到过普鲁士和波兰。并担任过荷兰军队的会计。这些已在前边提过,他于 1585 年出版了有关小数的书,在书中,237.578 被写为 237⓪5①7②8③。书中还讲了小数间加、减、乘、除,即有关四则运算的方法。

与几何学相比,代数学发展的较晚。同样,小数的发现就更晚了。

据说,最早承认存在有负数,或者在整数、分数和小数之外还有其它数的是印度人。

负数是与正数关于0相对称的数。与1对称的是－1，对称于2的是－2。

参阅图7-1的数轴，就更清楚了。

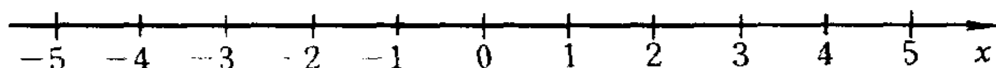


图7-1

因为小数是由分数变来的，所以正的真分数转换为正的小数，这些小数位于数轴的0与1之间。

另外，负的小数是位于0与－1之间的数，它们是负的真分数变换来的。

与带分数相类似，带小数是整数与小数相加的数。

如$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{5}=0.2$，$\frac{1}{10}=0.1$，小数不过是分数的另一种表示形式而已。

分数出现的很早，在公元前就有了，但小数很晚才出现，其性质研究得很透彻。

斯蒂文将小数总结归纳并写书出版已是16世纪后半叶的事了，距今大约400年。

当然，在此以前也有人研究过小数。印度很早就承认存在小数，虽说发现了印度·阿拉伯数字（算用数字），但没有听说过将128.567写成现在这种形式。10世纪以后，欧洲普及印度·阿拉伯数字，但如果看一下斯蒂文早期记数法，对这种状况也就清楚了。

日本江户时代后期，将128.567称为一百二十八和五割六分七厘。与斯蒂文记数法有相似之处。

现在看来，那时对负数与小数之间的关系，肯定理解得不像今天这样清楚。

在古代数学中，小数也是10进位的。称1的$\frac{1}{10}$即0.1为“割”，称$\frac{1}{100}=0.01$为“分”，$\frac{1}{1000}=0.001$为“厘”，$\frac{1}{10000}=0.0001$为“毛”，毛的$\frac{1}{10}$，即$\frac{1}{100000}=0.00001$为“系”。接下去，一个接一个地取$\frac{1}{10}$单位为忽、微、纤、尘、埃、渺、漠等。比它们更小的单位为模糊、踌躇、须臾、瞬息、弹指、刹那、六德、虚、空、清、净。

毛是万分之一，系是10万分之一，忽是百万分之一，纤是亿分之一，渺是1万亿分之一。

在排列出这些小数单位之后，顺便也列出现在日本国家预算和人口增加等方面出现的大数目的单位，也许会有参考价值。

在日本有，一、十、百、千、万、十万、百万、千万、一亿、十亿、百亿、千亿、一兆、十兆、百兆、千兆、一京、十京、百京、千京。

如大家所知，日本的大的单位是万进位，欧美是千进位，从1(one)、10(ten)、100(hundred)、1000(thousand)到100万成为1兆(million)，10亿成为1吉(billion)。

也就是说，在日式表示中，每4位加一分号(,)，而欧美式表示，是每3位加一分号(,)。

顺便写一下比千京大的单位。它们也是10进位，有垓、秭(秄)、穰、沟、涧、正、载、极等。

在距今700年前，中国元朝数学家朱世杰著《算学启蒙》一书，书中写明，极的后面有恒河沙、阿僧祇、那由他、不可思议、无量、大数(或无量大数)等名称复杂的更大的单位。

因这方面内容较复杂，故列成表 7-2。

表 7-2　单位的印度命名法

一		一	
十	10	分	$10^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$
百	10^{2}	厘	$10^{-2}\left(\frac{1}{10^{2}}\right)$
千	10^{3}	毛	10^{-3}
万	10^{4}	糸	10^{-4}
億	10^{8}	忽(こつ)	10^{-5}
兆	10^{12}	微(び)	10^{-6}
京(けい)	10^{16}	繊(せん)	10^{-7}
垓(がい)	10^{20}	沙(しゃ)	10^{-8}
秄(じょ)	10^{24}	塵(じん)	10^{-9}
穣(じょう)	10^{28}	埃(あい)	10^{-10}
溝(こう)	10^{32}	渺(びょう)	10^{-11}
澗(かん)	10^{36}	漠(ばく)	10^{-12}
正(せい)	10^{40}	模糊(もこ)	10^{-13}
載(さい)	10^{44}	逡巡(しゅんじゅん)	10^{-14}
極(ごく)	10^{48}	須臾(しゅゆ)	10^{-15}
恒河沙(こうがしゃ)	10^{52}	瞬息(しゅんそく)	10^{-16}
阿僧祇(あそうぎ)	10^{56}	弾指(だんし)	10^{-17}
那由他(なゆた)	10^{60}	刹那(せつな)	10^{-18}
不可思議(ふかしぎ)	10^{64}	六徳(りつとく)	10^{-19}
無量大数(むりょうたいすう)	10^{68}	虚(きょ)	10^{-20}
		空(くう)	10^{-21}
		清(せい)	10^{-22}
		浄(じょう)	10^{-23}

在表中将$\frac{1}{10}$称为“分”，而不是“割”，究竟哪一个正确？

表中将单位名称与现代的10^n形式加以比较，读者见了较易理解。

表中10^3当然是$10\times10\times10=1000$、$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$。

这样π的近似值3.14就成为3和1分4厘，3.1416为3和1分4厘1毛6系。

照此法读$\pi\approx3.1415926535$则变为“3和1分4厘1毛5系9忽2微6纤5沙3尘5埃”。显然，在小数的每位后面加上单位名称，读起来很麻烦。因此在日本，小数“直读为3点1415926535”。

据说大数和小数的单位是从印度佛教经书中传下来的。

其中“恒河沙”是代表印度大河恒河的沙子的数目。

1极代表1后面跟着48个0的整数。

在航天时代的今天，再大的数也能用指数很简单地表示。

在日本国家预算中，日本单位“兆”已不大够用，快要用到日式单位“京”了。按照这种节奏走的话，可以预测，到21世纪会用更大单位。

π、e、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等是无限不循环小数，都是无理数。

将分数$\frac{a}{b}$改成小数，a除以b，除不净时，成为循环

小数。如前所述，$\frac{22}{7}$和$\frac{355}{113}$也是循环小数。

不论分母多大，$\frac{a}{n}$（a 除以 n，除不净时）这样的分数，最迟在除第 n 次时会出现相同的余数，因此成为循环小数。

这种由分数转化来的无限小数是“有理数”。

稍微离题，顺便指出，$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π 等可用谐音辅助记忆。

下面写出将循环小数写成分数的方法，这与 π 没什么关系。

$$0.3333\cdots=0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$0.1212\cdots=0.\dot{1}\dot{2}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

$$0.23434\cdots=0.2\dot{3}\dot{4}=\frac{234-2}{990}=\frac{232}{990}=\frac{116}{495}$$

$$2.\dot{3}=2+0.\dot{3}=2+\frac{3}{9}=2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$$

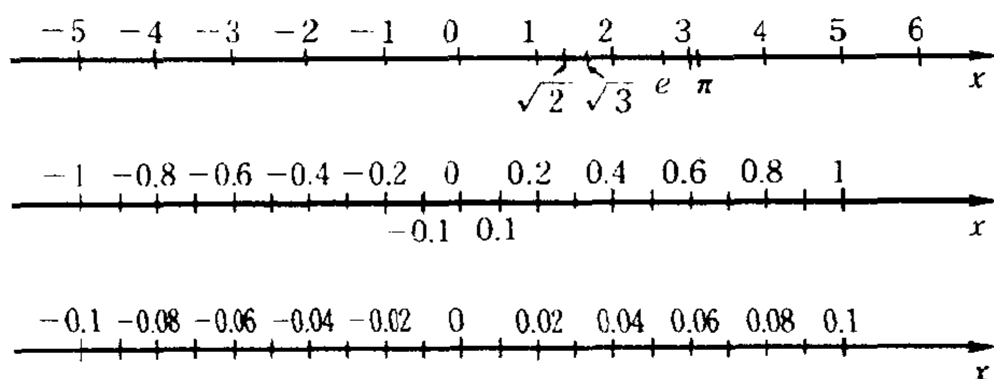


图 7-2

7.7 用于计算机的展开式

大约在40年前,开始用计算机计算π值。当时使用马庭公式:

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$$

在距今400年前的荷兰,卢多夫将π值计算到20位,这正值日本江户时代的初期。

中间跨越350年,π值的位数从20位一下子猛增到2000位。

大约在100年前,已计算到707位(实际上527位以前是正确的)。在1873年,是由山克斯完成的。

以后又重新完善了展开式。现在使用下式:

$$\pi = 24\arctan\frac{1}{8} + 8\arctan\frac{1}{57} + 4\arctan\frac{1}{239}$$

使用此公式,π的近似值正确位数可达10万位以上。提出这个展开式的人,估计参考了先辈们的许多展开式。

最近,π的位数延伸得很快,已超过10亿位。

1989年7月,日本金田康正先生将π的近似值计算到5亿3687万位。同年9月哥伦比亚大学达到10亿1119万6691位。同年11月金田康正先生计算到10亿7374万位。就这样,吉尼斯记录快速地改写着。

也许有人会问,有什么必要增加这么多位数?至少π的近似值的计算在研究计算机的性能方面是相当合适的。其原因在于它的展开式允许计算到任意位数。

7.8 展开式中反正切的有效利用

本节稍有些专业化，因较多使用 arctan$x$ 的展开式，下面对其加以说明。

讲一下作为其基础的三角函数和反三角函数、微分法的性质及有关公式。

反函数微分时有，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$。

三角函数中最重要的公式是

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

商的导数是

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{\{g(x)\}^2}$$

利用以上这些基本性质，可将 $y=\arctan x$ 微分。

由 $y=\arctan x$ 得 $x=\tan y$，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\dfrac{d\tan y}{dy}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\tan y}{dy}&=\frac{d}{dy}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}\\&=\frac{(\sin y)'\cdot\cos y-(\cos y)'\cdot\sin y}{\cos^2 y}\\&=\frac{\cos y\cdot\cos y-(-\sin y)\cdot\sin y}{\cos^2 y}\\&=\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}=1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\\&=1+\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)^2=1+\tan^2 y\\&=1+x^2\quad(-\infty<x<\infty)\end{aligned}$$

将以上结果归纳为

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

再利用$(x^n)' = nx^{n-1}$，可得

$$(\arctan x)'' = \frac{d}{dx}(1+x^2)^{-1} = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x$$

$$= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$(\arctan x)''' = -2(1+x^2)^{-2} + (-2)(1+x^2)^{-3}$$

$$(+2x)(-2x)$$

$$= -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}$$

……

这样接连不断地微分

$$\frac{d^n \text{arc tan} x}{dx^n}$$

$$= (n-1)!\ \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) (y = \text{arc tan} x)$$

$$= (n-1)!\ \cos^n \arctan x \cdot \sin n\left(\text{arc tan} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

其中 $y=\arctan x$ 是正切 x 的主值(角)。

使用求和符号 $\sum$，可将 $\arctan x$ 的展开式写为

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leqslant 1)$$

展开此式，

$$\arctan x = (-1)^0 \frac{x^1}{1} + (-1)^1 \frac{x^3}{3} + (-1)^2 \frac{x^5}{5}$$

$$+ (-1)^3 \frac{x^3}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} +$$

…

在此式中，代入 $\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$，则有

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$+ (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots$$

使用求和号时，则上式就是有名的莱布尼兹·格里高利公式：

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

如前所述，此级数收敛慢。因此，许多科学家采用收敛快的马庭公式或欧拉公式。不管是用笔，还是用计算机，这两个公式算出的 π 的位数都有很大增加。

但是算到 50 项或 100 项，已相当过分。

远古时期，用圆内接正多边形计算圆周率，据说边数取到 2^{30}。若用对数计算 2^{30}，对 $x = 2^{30}$ 两边取对数，

$$\log_{10} x = 30\log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.030$$

由此求真数 x。$x = 1,070,000,000$。差不多是正 10.7 亿边形。

由此看来，无论用笔，还是使用计算机，展开式项数可无限增多。用计算机计算时，大约要计算几十亿次。

另外，计算机采用 2 进制，要用 10 进制显示计算结果，也需花不少时间。

7.9 2进位法和计算机的普及

我们日常使用的印度·阿拉伯数字(算用数字)是"10进制",或"10进位"数字。

这种数字使用从0到9十个数字。无论多大或多小的数,都可用这10个数字表示。

而且,10进位数字可表示从负数到小数、分数的一切实数(有理数和无理数)。还可表示 $a+bi$ 那样的复数。此中 i 称为"虚数单位",$i^2=-1, i=\sqrt{-1}$。

印度·阿拉伯数字是由远古的印度数学家布拉马古普塔(Brahmagupta)、阿里亚哈塔(Aryabhata)、巴斯卡拉(Bhaskara)等发明的,后经阿拉伯、西班牙传到全欧洲。

此事前面已经讲过了,这种数字传入日本是明治以后的事了。

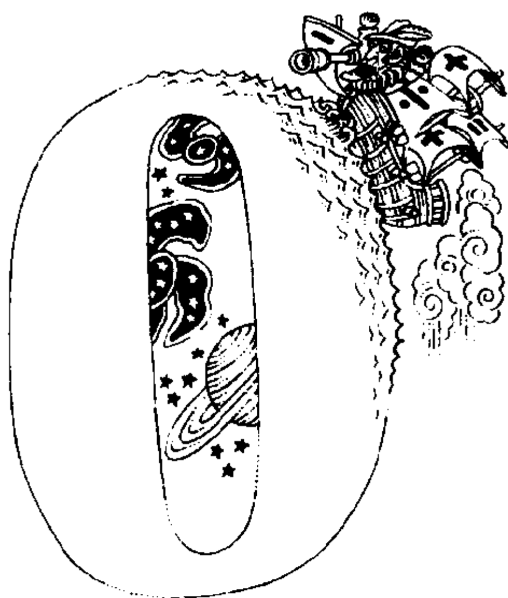


图7-3　0的发明是数学的大革命

这种数字采用0代表位数或空位，有其独到之处，比其它国家的任何数字都优越，故至今在世界范围内通用。

π的位数由20位发展到707位，直到现在已经超过亿位。这在很大程度上依赖于印度·阿拉伯数字的发明。

其中0的发明更伟大，在印度刚开始发明0的时候，把它写为◯。据说这个符号代表太阳，以后才逐渐演变为现在的形状。

把0称为"zero"来源于意大利语。现在全世界多半这么称呼。

下面，顺便讲一下进位制。

数字除有10进位制外，还有5进位制、12进位制、20进位制、60进位制等。

英国的码、镑是12进制。而且，表示铅笔等的根数时，12根以"一打"(one dozen)。12打叫"一罗"(one gross)"至今仍这么称呼，这也是12进制。

在时间、时刻、角度等至今仍广泛使用60进制。

5、10、20等进位制也许是从人的手脚出发而产生的。12、60进位制可能因其约数较多、分割方便。

回到本节内容上来，在计算机中使用的是2进位制。用1和0两个数字，就可表示无论多大的数。

使用2进制数字计算下，由于位数增加的太多，因此2进制在笔算中是行不通的。

对计算机来讲，位数再大，几乎也没有什么关系。

用电信号表示1和0的方法很多。例如，可以用0代表无电压，1代表有电压。在电气处理上很容易实现这两种状态。

在计算机内部，采用了不易丢失信息、相当复杂的表现方式。

有人可能认为我们平时所用的10进制数很难换成2进制数。实际这种担心是没有必要的。

举一个例子。

用除法可将10进制数1988改写成2进制数11111000100。这个结果对吗？

由竖式可知，将10进位的数用10除几次的余数从下往上并列1、9、8、8时，则就得出1988。

其理由很简单。

因为 $1988 = 1000 + 900 + 80 + 8 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

```
2)1988
  2)994  ………… 0
  2)497  ………… 0
  2)248  ………… 1
  2)124  ………… 0
   2)62  ………… 0
   2)31  ………… 0
   2)15  ………… 1
    2)7  ………… 1
    2)3  ………… 1
      1  ………… 1

10)1988
  10)198  ……… ⑧
   10)19  ……… ⑧
       ①………… ⑨
```

而在2进位制中，

$$1988 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$$
$$= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^2$$
$$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 4$$
$$= 1988$$

因此，将10进位数多次用2除，就可将其变换成

2 进制数，只是麻烦一些罢了。

下面介绍二种简单的变换方法。

第一种方法是将 10 进制数先换成 8 进制数，然后再改成 2 进制数。

8 进位数有 0、1、2、3、4、5、6、7 等这 8 个数字。先把这 8 个数字换成 2 进位数字。如表 7-3 所示。

表 7-3

8 进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
2 进制数	000	001	010	011	100	101	110	111

如表 7-3 所示。因 $8=2^3$，所以 8 进制数在 2 进制中用三位数表示。

计算 1988÷8，如竖式。

1988 成为 8 进制数 3704。

然后按表 7-2，代入相应的 2 进制数。

```
8)1988
  8)248  ………  ④
   8)31  ………  ⓪
      ③  ………  ⑦
```

1988⇒3704⇒011，111，000，100

把最前边的 0 去掉，10 进制的 1988 变成 2 进制的 11111000100。

另一种办法是采用 16 进制，再将 1988 换成 2 进制。

古希腊也采用过象形文字，那时的数字是使用字母 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\cdots$ 等代表 1，2，3，4，5，…。为此，英语字母开始叫“$\alpha-\beta$”。现在还是称 $a,b,c\cdots x,y,z$ 是“alphabet”，大写字母也如此。

因 A,B,C 比 α,β,γ 容易记，所以按表 7-4 那样作出规定。

表 7-4

10 进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
符号	O	A	B	C	D	E	F	G
2 进制数	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
10 进制数	8	9	10	11	12	13	14	15
符号	H	J	K	L	M	P	R	S
2 进制数	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

因 $16=2^4$，故 0—15 在 2 进制中是 4 位数。

计算 1988÷16。

16)1988
16)124 ……… ④
⑦ ……… ⑫

1988⇒⑦⑫④⇒GMD

=0111,1100,0100

去掉最前面的 0。

1988⇒11111000100

用 16 进位制好像更简单了。

用 16 进位制时，也有人用上了我们日常使用的算用数字 0—9，具体是谁，问不清楚，作为参考将其列在表 7-5 中。

表 7-5

10 进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
16 进制数	0	1	2	3	4	5	6	7
2 进制数	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
10 进制数	8	9	10	11	12	13	14	15
16 进制数	8	9	A	B	C	D	E	F
2 进制数	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

若多采用一些符号，还可将 10 进制数用 32 除，$32=2^5$，各个符号在 2 进制中是 5 位数。总之再大的数都可换成 2 进制数，喜欢计算的人，不妨一试。

7.10 用个人计算机计算π

如前所述，从公元前就开始研究圆周率π的近似值，并加以计算。

作为计算方法，开始是采用增多圆内接或外切正多角形边数的方法，以后也有人采用连分数的方法。

最近是用π的展开式计算π的近似值。

在此，利用个人计算机计算。

据说，美国使用随机数表等方法，将π值计算到几亿位，并申报了专利。本书介绍使用一般通用的展开式，将π的近似值求到10位以上的计算程序。

此程序是作者母校，东京理科大学的教授兼日本数学教育学会的松尾吉知先生提出的，由该校情报中心的内田好先生具体实施。

他采用PC9801机，使用N88BASIC程序语言，并取得了较好的结果。

在以下的程序中，威利斯、欧拉和莱布尼兹展开式的收敛性不好，其它7个展开式可准确求到小数点后15位。

●马庭使用了如下的公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * J. Marchin (1706) : 100 digit         *
120 REM *  ratio of the circumference           *
130 REM *  of the circle to the diameter        *
140 REM ****************************************
```

```
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  #  : double precision
170 AS#=4*ATN(1/5#)-ATN(1/239#)
180 PRINT AS#*4#
190 END
3.141592653589793
```

●松永良弼使用如下公式

$$\pi^2 = 9\left(1 + \frac{1^2}{3 \cdot 4} + \frac{1^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots\right)$$

```
100 REM ******************************************
110 REM * マツナガ ヨシスケ (1739) : 14 digit      *
120 REM *  ratio of the circumference            *
130 REM *  of the circle to the diameter         *
140 REM ******************************************
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  #  : double precision
170 A#=1
180 B#=1
190 FOR I=1 TO 100
200 B#=B#*I*I/((2*I+1)*(2*I+2))
210 A#=A#+B#
220 NEXT I
230 PRINT SQR(A#*9#)
240 END
3.141592653589793
```

●松永良弼还有另一公式

$$\pi = 3\left(1 + \frac{1^2}{4 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \right.$$

$$=\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}+\cdots\Big)$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * マツナガ　ヨシスケ (1739) : 51 digit     *
120 REM *  ratio of the circumference            *
130 REM *  of the circle to the diameter         *
140 REM ****************************************
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  #  : double precision
170 A#=1
180 B#=1
190 FOR I=1 TO 100 STEP 2
200 B#=B#*I*I/((2*I+2)*(2*I+4))
210 A#=A#+B#
220 NEXT I
230 PRINT A#*3#
240 END
    3.141592653589793
```

●维加的公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-2\arctan\frac{1}{408}+\arctan\frac{1}{1393}$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * ベガ (1789)                             *
120 REM *  ratio of the circumference            *
130 REM *  of the circle to the diameter         *
140 REM ****************************************
```

```
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  #  : double precision
170 AS#=4*ATN(1/5#)-2*ATN(1/408#)
                 +ATN(1/1393#)
180 PRINT AS#*4#
190 END
```
3.141592653589793

●高斯的公式

$$\frac{\pi}{4}=12\arctan\frac{1}{18}+8\arctan\frac{1}{57}-5\arctan\frac{1}{239}$$

```
100 REM *****************************************
110 REM * ガウス                                *
120 REM *  ratio of the circumference           *
130 REM *  of the circle to the diameter        *
140 REM *****************************************
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  #  : double precision
170 AS#=12*ATN(1/18#)+8*ATN(1/57#)
                 -5*ATN(1/239#)
180 PRINT AS#*4#
190 END
```
3.141592653589793

●斯特姆的出生、去世年月不清，其公式为

$$\frac{\pi}{4}=6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239}$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * ステルマー                            *
120 REM *  ratio of the circumference          *
130 REM *  of the circle to the diameter       *
140 REM ****************************************
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  # : double precision
170 AS#=6*ATN(1/8#)+2*ATN(1/57#)
                    +ATN(1/239#)
180 PRINT AS#*4#
190 END
    3.141592653589793
```

●卢瑟福的公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{70}+\arctan\frac{1}{99}$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * ラザフォード (1824) : 208 digit       *
120 REM *  ratio of the circumference          *
130 REM *  of the circle to the diameter       *
140 REM ****************************************
150 REM atn : function name of arctan
160 REM  # : double precision
170 AS#=4*ATN(1/5#)-ATN(1/70#)+ATN(1/99#)
180 PRINT AS#*4#
190 END
    3.141592653589793
```

以下三个是收敛性较差的三个公式及其相应的计算机程序，以供参考。

●威利斯的公式

$$\pi=2\left(\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots}\right)$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * ウォーリス                            *
120 REM *  ratio of the circumference           *
130 REM *  of the circle to the diameter        *
140 REM ****************************************
150 A#=1#
160 FOR I=10000 TO 1 STEP-1
170 A#=A#*(2#*I*2#*I)/((2#*I-1#)*(2#*I+1#))
180 NEXT I
190 PRINT A#*2#
200 END
    3.141514118681485
```

●莱布尼兹的公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * グレゴリー・ライプニッツ              *
120 REM *  ratio of the circumference           *
130 REM *  of the circle to the diameter        *
140 REM ****************************************
150 REM  #  ;/double precision
160 A#=0
170 FOR I=10000 TO 1 STEP-1
  180 IS#=1
  190 IF (I-INT(I/2)*2)=0 THEN IS#=-1
  200 A#=A#+IS#/(2*I-1)
  210 NEXT I
  220 PRINT A#*4#
  230 END
  3.14149265390043
```

格里高利在 1671 年，莱布尼兹在 1673 年分别找到了同一公式。

●欧拉的公式：

$$\pi^2=12\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

```
100 REM ****************************************
110 REM * オイラー                              *
120 REM *  ratio of the circumference          *
130 REM *  of the circle to the diameter       *
140 REM ****************************************
150 REM  #  : double precision
160 A#=0
170 FOR I=5000 TO 1 STEP-1
180 IS#=1
190 IF (I-INT(I/2)*2)=0 THEN IS#=-1
200 A#=A#+IS#/(I*I)
210 NEXT I
220 PRINT SQR (A#*12#)
230 END
   3.141592615398161
```

第八章

π也用于统计

8.1 数理统计的历史

有关数理统计的历史，恰好可引用明星大学宇喜多义昌先生的论文。在论文中，他有如下阐述：

“据说，几何学在公元前3000—2000年由埃及圈绳划地开始的。在希腊得到发展并形成体系。

在这方面，最有代表性的数学家是欧几里得。他是公元前300年时的人。因此，几何学在此之前就已产生。

代数学是在公元一世纪，在印度和阿拉伯数学的基础上发展起来的。因此，可以说很早就有了代数学。

作为微积分学开端的解析数学，是以牛顿（1642—1727）在1704年发表的论文为起点，至今也有近300年的历史。

但是，概率论却是在17世纪中叶，在帕斯卡和费马两人间书信来往中发展起来的。它形成一门学问的标志是1812年拉普拉斯（1749—1827）发表的“解析概

率论”，据今约180年。

另外，统计学是以皮尔逊(1857—1936)和加尔通(1822—1911)的记述统计学为起点。因此据今不足百年。

现在作为统计学主流的推测统计学被称为统计学是在戈雅特(1876—1936)论文(1908年)和费希耳(1890—1962)论文(1925和1935年)发表之后。由此看来，只有60年左右的历史。

在日本，概率和统计出现在学校教育中，是二次大战之后的事了。

战前很少触及概率论，大学里几乎没有这方面的资料。”

以上这段话，简要地概述了这方面的历史。

战后，统计学得到了重新认识。在初中、高中，甚至小学课本中都出现了这方面的内容。

但那时还没有制定出恰当的统计教学体系，大学入学考试不考这方面内容，即使考，也不知出什么样的题合适。与此同时，有关骰子或硬币的反正两面概率或班级里学生身高、体重的统计，与数理统计相比，二者难度相差甚大。这也给实际教学带来困难，所以战后40年(1985)仍没建立起牢固的领域。

其结果，在现在高中，学完数理统计的人极少。

作为开场白，就到此为止。下面稍微讲一下数理统计的内容，重点还在π与统计的关系。

8.2 研究数理统计的人

将概率作为学问加以研究的第一个人是意大利数

学家 T. 考尔塔诺(1501—1576)。



图 8-1　考尔塔诺(1501—1576)

他是米特诺律师的私生子，毕业于帕皮亚大学的医学部，毕业后最先从医。

后来，他学过哲学和数学，成为帕皮亚的市长。

他也研究占星术和物理学，他作为专业赌博师也是很有名气的。

有一次，一个朋友问他"掷 2 个骰子(也有人说是 3 个)时，出现次数最多的点数之和似乎是 7。这是为什么呢?"他从数学上解答了这个问题。

点数之和为 2 时只出现 1 次，点数之和为 3 的出现 2 次，4 的出现 3 次，5 的出现 4 次，6 的出现 5 次，7 的出现 6 次，8 的出现 5 次，9 的出现 4 次，10 的出现 3 次，11 的出现 2 次，12 的出现 1 次，如表 8-1

表 8-1　2 个骰子点数之和与出现的次数

点数之和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
出现次数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

的确，2 个骰子的点数之和为 7 时，出现的次数最多。7 出现的方式分别为(1、6)，(2、5)，(3、4)，(4、3)，

(5、2)，(6、1)。

在此基础上，他除了写代数方面的著作外，还写了有关赌博方面的书。关于代数方面的著书，还留下了如下的趣闻逸事。

听到了塔鲁塔拉发现了3次方程式的一般解法之后，考尔塔诺便去向塔鲁塔拉求教。但后者不肯教授。最后塔鲁塔拉以“绝对保密”为先决条件，才教给了考尔塔诺。

但，考尔塔诺没有遵守这项规定，他发表了文章，就好像是自己研究发现的。因此现在仍误传3次方程式的一般解法是考尔塔诺发现的。

考尔塔诺既是位天才，又是位狂人。

他说，“同时掷二个骰子，赌点数之和是7最有利。”实际确实如此。

统计学是以概率(信赖度)为基础的一门学问，统计学分二种。

一种是记述统计学。它是求若干个数据的合计、平均和标准误差。

另一种是“推计学”或“推测统计学”，它根据大量数据进行推测，得出“会怎样”的结论，给出发生的概率和百分之多少的信赖度，以此为基础预测未来发生的事。

在以概率为基础的推测统计学中用到了π。

除考尔塔诺外，法国的帕斯卡(B. Pascal，1623—1662)也研究过概率。

帕斯卡出生在法国中南部的阿韦龙省的凯斯鲁门，3岁时他失去母亲，少年时随父及两个姐姐来到巴黎。

他没受过正式教育，自学欧几里得几何学。

他父亲对他说过“你还太小，不能学太难的东西。”为此把他的书给收了起来。

到了 12 岁，他认识到“三角形三内角之和是一定值。”并能阐明道理，这使他父亲大吃一惊！这是一段他研究几何图形的传闻。

他的著名的帕斯卡三角形是将$(a+b)^n$展开式中的系数排列成如下的三角形的形状。

$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
……	……

另外，有关液体的帕斯卡定理也是相当有名的，在现代，它广泛应用于汽车的液压制动器、建筑中的蒸汽锤、火车的制动器等。

帕斯卡是在与费马通信中探讨概率论的。

不能使人忘记的是，作为一名哲学家，帕斯卡也是一流的。在“瞑想录”一书中，他留下了“人生如苇”这一名句。

8.3 正则分布和信赖度

把 π 与概率硬性地联在一起，会引出与下面相类似的问题。

如图 8-2。在边长 1m 的正方形正中，有个直径为 60cm 的圆。投掷小球，问小球命中圆的概率是多少？其

中命中正方形四周边线或命中圆周都算作命中圆。

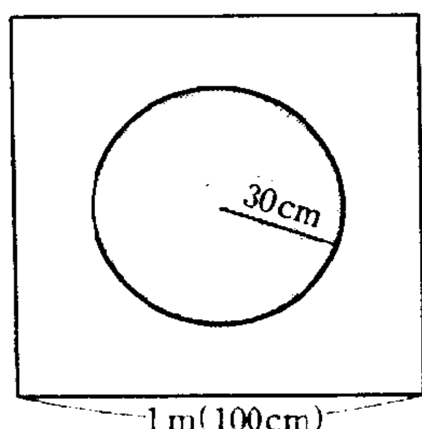


图 8-2

解　正方形的面积是 1 米^2=10000 厘米^2，正中圆面积是 $\pi\times30^2=900\pi$(厘米^2)。故小球命中圆的概率为

$$P=\frac{900\pi}{10000}=\frac{9\pi}{100}=0.09\pi\doteq28.26(\%)$$

因为投球太容易，这样提问题不太合适。描准当中投，相当多的人会百发百中，概率为 100%，但从数学上考虑则为 0.09π 或 28.26%。

有个再稍难一些的问题，是法国生物学家 S. 比风(1707—1788)提出的。在平面上划二条平行直线，将与二线间距同长度的针从上方随意落下，针与直线相交叉的概率为 $\frac{2}{\pi}$。此问题中也出现了 π。有人会提出来，π 是怎样参与进来的呢？这实际与角有关系。从角连系到三角比，由三角比与 π 建立了联系。

摩根(A. De Morgan，1806—1871)让学生作这个实验。从 600 次的实验结果中，得出 $\pi=3.137$。

这样，在概率中出现了 π。在统计中同样也要用到 π。

例如，当数据资料非常多时，它们的频数分布呈以平均值为中心的左右对称的吊钟形时，统计中会出现π，这类分布叫“正则分布(normal distribution)”。

调查1000名相同年龄人的智商指数，其分布如表8-2

表8-2

智商指数	人　　数	相对人数
54.5—64.5	3	0.003
64.5—74.5	21	0.021
74.5—84.5	90	0.090
84.5—94.5	295	0.295
94.5—104.5	330	0.330
104.5—114.5	201	0.201
114.5—124.5	54	0.054
124.5—134.5	5	0.005
134.5—144.5	1	0.001
合　　计	1000	1

此表转摘自明星大学宇喜多义昌教授所著《统计学入门》。

同年令成人的智商指数x，随着统计人数的增多，可看成连续的概率变量。

图8-3(上)是直方图或折线图。也称为“分布多边形”。图中各区间的长方形面积代表相对人数值。

当数据增多，区间细分时，折线变成曲线，如图8-3(下)所示。

此曲线可由下式近似表示：

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

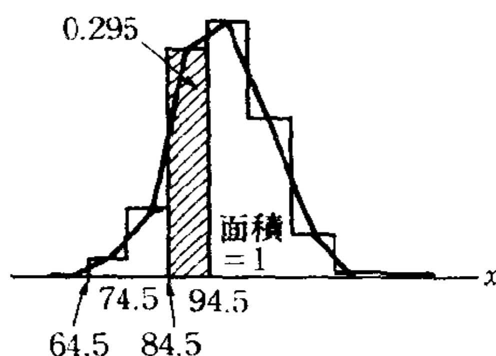


图 8-3(上)

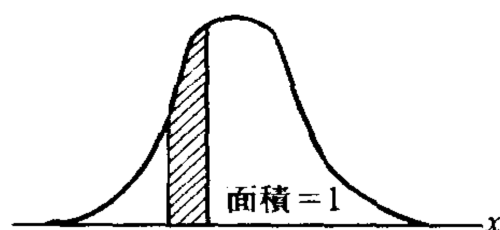


图 8-3(下)

其中,m,σ 是常数,$\sigma>0$。

能用上式表示的曲线称为"正则分布曲线(normal distribution curve)。

令函数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=f(x)$,则有

(1)$f(m+a)=f(m-a)$

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$

(3)在 x 为任何值时,$f(x)$ 皆为正,在 $x=m$ 时具有最大值(maximum value)$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

(4)在 $-\infty<x<m$ 时,$f(x)$ 单调增加,在 $m<x<\infty$ 时,$f(x)$ 单调减少。

同时,$f(x)$ 是以 $x=m$ 直线为对称轴的左右对称的吊钟形曲线,其渐近线为 x 轴。

(5)曲线 $y=f(x)$ 有二个拐点。它们是 $y=f(x)$ 与

直线 $x=m-\sigma$ 以及 $x=m+\sigma$ 的交点，如图 8-4 所示。

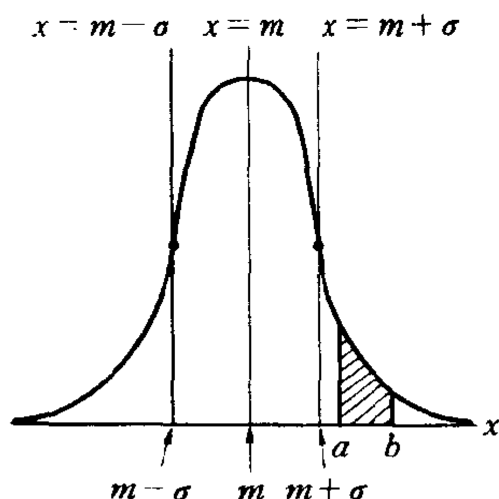


图 8-4

概率变量 X 在闭区间$[a,b]$的概率 $P(a \leqslant x \leqslant b)$

$$P(a \leqslant x \leqslant b)=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

X 的概率密度函数为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$时，称"$X$ 为正则分布"。

并将此概率密度函数写为 $n(x|m,\sigma^2)$。此时 X 的平均值和方差分别为 $E(X)=m, \sigma_x^2=\sigma^2$。

平均值为 m，方差为 σ^2 的正则分布写为 $N(m,\sigma^2)$。

当 $m=0, \sigma=1$ 时，概率密度函数变为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，称"$X$ 为标准正则分布 $N(0,1)$"。

X 的概率分布为正则分布 $N(m,\sigma^2)$时，$Z=\frac{X-m}{\sigma}$的概率分布为标准正则分布 $N(0,1)$。此过程叫"正则化"或"标准化"。

很明显，正则分布有

$$P(m-\sigma \leqslant x \leqslant m+\sigma)=\int_{m-\sigma}^{m+\sigma} f(x)dx=0.683$$

$$P(m-2\sigma \leqslant x \leqslant m+2\sigma)=\int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} f(x)dx=0.954$$

$$P(m-3\sigma \leqslant x \leqslant m+3\sigma)=\int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} f(x)dx=0.997$$

其中

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

上述公式可用图表示。如图8-5所示。这是些很有名的公式,想必大家对此都很了解。

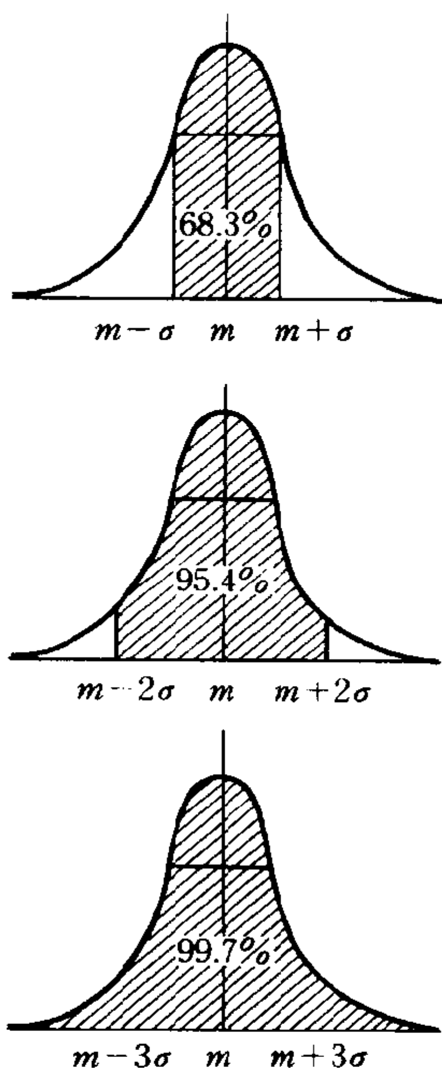


图8-5

同龄人的身高、体重、智商指数以及在一定的管理基础上生产出的产品的大小、重量等的分布，可按正则分布处理。

如前所述，数理统计的历史不长，但它在现代社会的各个方面都占有一定的地位。

今后，这个领域将更加发展，以适应社会的需要。

作者曾从事护士的教学工作，切身感到在医学上统计学也有用武之地。

此外，今后统计学将广泛用于生物学。

结束语

在学生时代，我师从恩师笹部贞市郎先生、三上义夫先生和矢野健太郎先生，对数学史产生很浓的兴趣，也曾出版过几本读物。岁月流逝，为了这本书经得住推敲，我参阅了后面所列的书目。对这些书的作者和出版社，在此一并表示谢意。

看了本书感到不够满意的读者，请进一步阅读有关方面的书籍。

受平山谛先生的《圆周率的历史》一书的启发我才得以动笔，后又多处引用了这本书，在此深表谢意。此外，承蒙明星大学宇喜多义昌教授的好意，引用了他的资料和论文。

还有，在日本数学教育学会名誉会长松尾吉知先生的指导下，我从东京理科大学信息处理中心的内田好先生处得到了计算机程序原稿，从日本数学史学会会长下平和夫先生处了解到了江户时代日本数学状况。

对以上诸位再次表示感谢！

堀場芳数

1989年9月1日于伊豆

参考书

"茶間の数学"　笹部貞市郎著　聖文社
"円周率の歴史"　平山谛著　大阪教育图書
"πの歴史"　P. ベックマン著　田尾. 清水共訳蒼樹書房
"πの話"　野崎昭弘著　岩波書店
"统计数学入門"　宇喜多義昌著　新数社
"数学英和. 和英辞典"　小松勇作编　共立出版
"大日本百科事典ジャポニガ"　小学館
"ンビモカラ一図鑑(せんすラ)"堀場芳数著　講談社
"学習総合大百科事典(算数)"堀場芳数著　講談社